Les nombres et le calcul avec la pascaline

aux cycles 2 et 3

***

Janvier 2018

LES AUTEURS

Monique DEMAS
Professeur des écoles spécialisée E, École primaire publique de Saint-Mamet-la-Salvetat

Séverine FLEURY
Professeur de mathématiques, Collège de la Comté, Vic Le Comte

Thierry LAMBRE
Professeur des Universités, Directeur de l'I.R.E.M. de Clermont-Ferrand

Josette METAIS
Professeur des écoles, École primaire publique Vercingétorix, Aubière

Annie NOIRFALISE
Maître de Conférences, I.R.E.M. de Clermont Ferrand

Isabelle NOYGUES
Professeur des écoles, École primaire publique de Saint-Mamet-la-Salvetat

Sophie SOURY-LAVERGNE
Maître de Conférences, Institut Français de l'Éducation ENS de Lyon

LES PARTICIPANTS AU GROUPE DE TRAVAIL

Isabelle BONNET, Professeur des écoles, Haute-Loire

Olivier COSTE, Professeur des écoles, Haute-Loire

Bruno DEFAY, Conseiller pédagogique généraliste, Haute-Loire

Monique DEMAS, Professeur des écoles spécialisée E, Cantal

Corinne DEWILDE, Professeur des écoles, Haute-Loire

Isabelle DUMONT, Conseillère pédagogique généraliste, Cantal

Séverine FLEURY, Professeur de mathématiques en collège, Puy de Dôme

Thierry LAMBRE, Professeur des Universités, directeur de l'I.R.E.M. de Clermont-Ferrand

Josette MÉTAIS, Professeur des écoles, Puy de Dôme

Annie NOIRFALISE, Maître de conférences, I.R.E.M. de Clermont-Ferrand

Isabelle NOYGUES, Professeur des écoles, Cantal

Pierre OKOTNIKOFF, Conseiller pédagogique A.E.S.H., Cantal

Aurélie ROUX, Professeur de mathématiques en collège, Puy de Dôme

Sophie SOURY-LAVERGNE, Maître de conférences, IFE ENS de Lyon

L'ASSISTANTE À L'ÉDITION

Françoise TOLEDO, Secrétaire l'I.R.E.M. et de la Maison pour la science en Auvergne

AVANT-PROPOS

Les cailloux et le calcul.

Pour dénombrer leurs troupeaux, les bergers Élamites et Sumériens de Mésopotamie constituaient des sphères creuses d'argile humide dans lesquelles ils inséraient de petits cailloux (les calculi), un par bovins ou ovins, puis scellaient hermétiquement ces « boîtes à calculs » et les emportaient avec eux en transhumance[1].

Figure 1. Bulle-enveloppe scellée et calculi
Suse, Iran, vers 3300 av. J.-C., Musée du Louvre.

À leur retour, les bergers brisaient ces réceptacles et mettaient en correspondance terme à terme les cailloux et leurs bêtes pour s'assurer de n'en avoir point égarées. Cette technique était également utilisée pour le négoce. Au cours des siècles, la société mésopotamienne apporta diverses améliorations scientifiques ou juridiques (cailloux de tailles différentes pour mesurer des quantités différentes, sceau royal etc.). Du commerce et de ces cailloux, naquit le calcul. De l'avis des historiens, l'homme sut compter avant de savoir écrire.

La Pascaline.

Quarante siècles plus tard, la mécanisation du calcul trouva elle-aussi son origine dans des questions sinon commerciales, du moins de finances publiques. Le hasard nécessaire à ce progrès fut une décision magnanime du Cardinal, qui en 1639, pour mettre terme à une obscure disgrâce, nomma Étienne Pascal adjoint à l'Intendance de Normandie en qualité de « Commissaire député de Sa Majesté pour l'impôt et la levée des tailles ». Sa charge, calculer les ressources de cette province, était d'une redoutable complexité, si l'on songe qu'à cette époque, la notion de comptabilité publique était pour le moins évanescente. Blaise, âgé de dix-neuf ans, entreprit d'aider son père dans cette tâche comportant de nombreuses opérations répétitives, dont, sans doute, d'interminables additions.

Pascal, car c'est de lui seul dont il s'agit désormais, comprit que tout calcul se prête à une mécanisation et entreprit de concevoir une machine infaillible et infatigable qui assurerait cette tâche, la première du genre[2].

Pour notre plus grande chance, Blaise Pascal, soucieux du succès de son invention, a laissé plusieurs écrits à propos de cette machine d'arithmétique. Nous n'en citerons que trois.

---

[1] Pierre Amiet, La naissance de l'écriture en Sumer et en Élam, Naissance de l'écriture, RMN, 1982, p. 46.
[2] Une correspondance de Kepler de 1623 conduit parfois à considérer l'astronome Schickard comme un précurseur du calcul mécanique, mais aucune trace de réalisation de machine à calculer n'est présente concernant Schickard.

Dans une lettre au puissant chancelier Séguier datée de 1645, Pascal présenta sa découverte pour obtenir un privilège royal afin d'en empêcher les contrefaçons.
« Les longueurs et les difficultés des moyens ordinaires dont on se sert m'ayant fait penser à quelques secours plus prompt et plus facile, pour me soulager dans les grands calculs où j'étais occupé depuis quelques années en plusieurs affaires qui dépendent des emplois dont il vous a plu honorer mon père pour le service de sa Majesté en la haute Normandie, j'employai à cette recherche toute la connaissance que mon inclinaison et le travail de mes premières études m'ont fait acquérir dans les mathématiques ; et après une profonde méditation, je reconnus que ce secours n'était pas impossible à trouver. » [3]

Dans un « avis nécessaire à ceux qui auront curiosité de voir la machine d'arithmétique et de s'en servir », Pascal présente sa machine aux utilisateurs.

Figure 2. La machine de Marguerite Périer, Muséum Henri Lecoq, Clermont-Ferrand.

« Cette machine facilite et retranche en ses opérations tout ce qui est superflu ; le plus ignorant y trouve autant d'avantage que le plus expérimenté ; l'instrument supplée au défaut de l'ignorance ou du peu d'habitude, et, par des mouvements nécessaires, il fait lui seul, sans même l'intention de celui qui s'en sert, tous les abrégés possibles à la nature, et à toutes les fois que les nombres s'y trouvent disposés. Tu sais de même comme, en opérant par la plume, on est à tous les moments obligé de retenir ou emprunter les nombres nécessaires et combien d'erreurs se glissent dans ces rétentions et emprunts à moins d'une très longue habitude et en outre d'une attention profonde et qui fatigue l'esprit en peu de temps. Cette machine délivre celui qui opère par elle de cette vexation ; il suffit qu'il ait le jugement, elle le relève du défaut de la mémoire ; et, sans rien ne retenir ni emprunter, elle fait d'elle-même ce qu'il désire, sans même qu'il y pense. »

De ce bref extrait, retenons les faits suivants :

- L'ingénieur Pascal expose les bénéfices qu'un utilisateur peut tirer de son invention.
- Le mathématicien Pascal affirme mieux que quiconque en son temps, et avec une clarté insolente, que calculer n'est pas une activité aussi simple qu'elle y paraît.
- Le philosophe Pascal souligne que sa machine d'arithmétique n'a aucune mémoire. Pascal n'ignore pas cette banalité d'aujourd'hui : tout calcul nécessite de la mémoire, pour l'homme ou pour la machine...

L'utilisateur ne pense plus, nous dit-il également. Interrogeons-nous : la machine pense-t-elle ? La réponse se trouve dans un autre texte, extrêmement lapidaire, où le philosophe Pascal réserve son estocade finale à une éventuelle intelligence des machines :

[3] Lettre dédicatoire à Monseigneur le chancelier, 1645.

« La machine arithmétique fait des effets qui approchent plus de la pensée que tout ce que font les animaux ; mais elle ne fait rien qui puisse faire dire qu'elle a de la volonté, comme les animaux. [4]*»*

La science informatique est née et avec elle, la philosophie de l'informatique car, avec Pascal, philosophie et sciences ont souvent fait bon ménage.

Le calcul sans les cailloux.

Près de deux autres millénaires furent nécessaires pour que les bergers cessèrent de briser leurs « boîtes à calculs » et aient l'audace de graver sur cette boîte un signe résumant le contenu de celle-ci ; les cailloux devenant inutiles, on ne garda que le signe le désignant, les boîtes s'aplatirent et devinrent tablettes babyloniennes. Adieu, moutons, cailloux, correspondances termes à termes et autres collections intermédiaires. Le résultat d'un calcul est un nombre : qu'importe la grandeur, pourvu qu'on ait sa mesure. Voici un des aboutissements de quarante-quatre siècles de mathématiques.

Figure 3. Le tableau noir et les calculs[5]*.*

Un calcul est un procédé réfléchi qui affecte de masquer les opérations mathématiques sous-jacentes pour se concentrer sur des notations dont on sait qu'elles sont adaptées aux automatismes.

Qu'on marque un temps d'arrêt pour se mettre à réfléchir pourquoi une addition doit être posée comme ceci et non pas comme cela, et on cessera d'être en mesure de faire l'addition en cours. Ce temps d'arrêt ne sera pas inutilement perdu car il sera le début d'un long cheminement fécond vers la compréhension de la technologie mathématique de numération décimale de position embarquée dans cette simple addition ainsi que sur les algorithmes mis en œuvre pour réaliser cette opération. Voilà un autre aboutissement de quarante-quatre siècles de mathématiques.

Enseigner le calcul.

Il est temps de s'interroger sur l'acte de calculer :

- Calculer quoi ? C'est-à-dire savoir distinguer une grandeur de sa mesure. Savoir oublier les moutons et les remplacer par des cailloux, et abandonner les cailloux pour découvrir les nombres.
- Calculer comment ? C'est-à-dire savoir mettre à plat les algorithmes des opérations.

L'objet des pages qui suivent est de s'interroger sur les difficultés à enseigner cet acte apparemment si simple, mais dont nos ancêtres ont mis tant de temps à le rendre extraordinairement performant.

---

[4] Pensées, 741-340
[5] http ://images.math.cnrs.fr/Ze-Blaque-Borde.html ?id_forum=11043

Les travaux présentés ci-dessous ont été muris sur plusieurs années par des enseignants, de la maternelle à l'université, tous confrontés à l'enseignement du calcul. De nombreuses expériences menées en classe sont décrites aussi précisément que possible pour qu'elles soient reproductibles. Des compléments thématiques à l'usage du professeur sont proposés pour oser se lancer dans une réflexion personnelle sur l'enseignement du calcul.

A chaque lecteur et lectrice de s'approprier et de transmettre ce pan merveilleux de notre histoire des mathématiques : le calcul.

Thierry Lambre

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Annie NOIRFALISE
I.R.E.M. de Clermont Ferrand
Sophie SOURY-LAVERGNE
Maître de conférences
IFÉ, ENS de Lyon

Résumé

La pascaline est une machine à engrenages, fabriquée en Italie et conçue à l'image de la calculatrice du même nom, mise au point par Blaise Pascal au XVIIe siècle[6]. Outil en plastique, elle semble pouvoir intervenir dans l'apprentissage du dénombrement de collections, dans la connaissance du système décimal de position et des algorithmes des opérations dans ce système de numération.
Des chercheurs de l'IFÉ – Institut Français de l'Éducation – ont travaillé dans cette direction et en ont conçu une version informatisée. À l'initiative de la M.P.S.A. – Maison Pour la Science en Auvergne – et de l'I.R.E.M. de Clermont-Ferrand, un groupe d'enseignants intéressés par ces travaux ont expérimenté l'usage de cet outil dans des classes du cycle 2, pour des apprentissages numériques initiaux, et dans des classes de cycle 3, pour réviser la numération et les opérations.
Les parties 1 et 2 de ce document présentent des comptes rendus de ces expérimentations.
La conception des séances a conduit les participants à approfondir leur formation sur des thèmes tels que : fonctions des nombres entiers, systèmes de numération, grandeurs et mesures, modélisation.
On trouve en partie 3 du document des apports sur ces sujets.

I. LA PASCALINE

Figure 4. La pascaline diffusée par l'association ARPEME et utilisée dans les écoles.

Cet outil, conçu et commercialisé en Italie[7] (voir Annexe 0 page 119), comporte un support en plastique vert, trois roues jaunes avec 10 dents, chacune numérotée de 0 à 9 et munie d'un repère triangulaire rouge au-dessous, deux roues orange munies chacune d'une flèche violette.

---

[6] Voir l'« Avant-propos » de cette brochure, rédigé par T. Lambre concernant Blaise Pascal et sa Pascaline.
[7] Commercialisée par la société Quercetti, elle est diffusée en France par l'association ARPEME, www.arpeme.fr, voir annexe I page 115.

On peut faire tourner les roues jaunes dans les deux sens autour de leur centre. La machine fait un petit bruit, un "clic", à chaque passage d'une dent devant le repère triangulaire. Quand on tourne une roue jaune dans le sens des aiguilles d'une montre et que les dents numérotées 9 puis 0 passent devant le repère triangulaire, la roue jaune qui se trouve à sa gauche avance d'une dent entraînée par la flèche violette de la roue orange qui est derrière. Simultanément, le « clic » émis par la pascaline est plus sonore. De même, quand on tourne une roue jaune dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, quand on passe de 0 à 9 devant le repère triangulaire, la roue jaune qui se trouve à sa gauche recule d'une dent.
Partant d'une position (telle que celle photographiée ci-dessus Figure 4) où sur toutes les roues le 0 est en face du repère triangulaire rouge, et tournant la roue jaune de droite de façon à ce que les chiffres 1, 2, 3, ..., 9, passent devant le repère, lorsqu'on amène 0 en face du repère, alors la roue jaune du milieu avance d'une unité : le chiffre 1 vient automatiquement se placer en face du repère. L'ensemble des trois roues jaunes affiche, en face des trois repères, le nombre 010. La roue jaune de droite est la roue des unités, celle du milieu est la roue des dizaines. Par un raisonnement analogue, on comprendra que la roue jaune de gauche est celle des centaines.
On comprend ainsi comment dénombrer une collection : en partant de 000, on fait correspondre chaque objet de la collection à un "clic" avec la roue jaune de droite dans le sens des aiguilles d'une montre et la pascaline affiche le nombre d'objets de la collection. Elle fonctionne comme un compteur.
Quand on tourne une roue jaune dans le sens [respectivement sens inverse] des aiguilles d'une montre, on fait un ajout [respectivement un retrait] d'une unité s'il s'agit de la roue jaune de droite, d'une dizaine s'il s'agit de la roue jaune du milieu (Figure 5), d'une centaine s'il s'agit de la roue jaune de gauche.
On comprend ainsi que la pascaline va pouvoir afficher le résultat d'un ajout ou d'un retrait à partir d'un nombre affiché. Elle fonctionne comme une calculatrice.

Figure 5. Le bon geste avec la pascaline, le doigt entre les dents, séparant clairement chaque itération de la rotation d'une roue, ici la roue des dizaines.

II. LA E-PASCALINE

La e-pascaline est une version informatisée de la pascaline (Figure 6). Elle a été conçue à partir de la technologie Cabri Elem, dans le cadre d'une collaboration scientifique entre l'IFÉ et la société CABRILOG (entreprise française de création d'outils mathématiques), à l'occasion d'un projet national de développement de ressources mathématiques pour la classe au cycle 1 et cycle 2[8].
La e-pascaline est incluse dans une collection de cahiers d'activités informatisés, qui sont des petits logiciels proposant des problèmes à résoudre avec la e-pascaline et à utiliser en association avec la pascaline[9].

La e-pascaline a été conçue dans le but de rendre complémentaires les usages de la pascaline et de la e-pascaline. Ainsi, la e-pascaline n'est pas une simple reproduction de la pascaline car elle ne fonctionne pas exactement de la même façon, bien que son apparence soit très similaire.

---

[8] Le projet « Mallette de ressources mathématiques pour la classe, cycle 1 et cycle 2 » et le LéA « Côte d'Or », Lieu d'éducation associé à l'IFÉ ont permis à des enseignants, des formateurs et des chercheurs de concevoir et d'expérimenter des ressources en mathématiques pour la classe. Rapport MOM à télécharger : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees-13-14/mallette/
[9] RIOU-AZOU, G., SOURY-LAVERGNE, S. (2015). Mallette d'outils mathématiques, le boulier et la pascaline. In *41e colloque de la COPIRELEM*. Mont de Marsan, France.

Le premier intérêt de la e-pascaline est qu'elle peut être projetée collectivement grâce à un vidéoprojecteur. Cela facilite les discussions et les bilans collectifs. Elle mobilise les élèves et permet une mise en commun des techniques étudiées alors que les manipulations effectuées sur la pascaline, trop petite, peuvent difficilement être vues par tous les élèves.

Figure 6. La e-pascaline, version numérique de la pascaline, est diffusée par l'IFÉ (voir annexe page 119).

Le deuxième intérêt de la e-pascaline est que certains usages de la pascaline qui n'ont que peu d'intérêt à l'école primaire ne sont pas possibles. C'est le cas de certains calculs, comme par exemple la soustraction 000 – 1, qui ne donnent pas un résultat dans le champ numérique connu des élèves de l'école primaire. Avec la pascaline, les élèves obtiennent 999, complexe à interpréter. Avec la e-pascaline, le calcul n'étant pas réalisable, l'enseignant peut laisser plus de liberté pour l'exploration.
Le troisième intérêt de la e-pascaline est qu'elle est incluse dans des cahiers d'activités informatisés qui offrent aux enseignants et aux élèves des activités de résolution de problème[10]. Ces cahiers informatisés avec la e-pascaline reposent sur quelques principes généraux :

- ils offrent une navigation page par page grâce à des flèches de navigation. L'entrée se fait par une page d'accueil avec le titre et le niveau scolaire. Les tâches à réaliser sont présentées dans les pages suivantes numérotées (de 2 à 6) ;
- ils permettent l'autonomie et la différenciation pour les élèves, grâce à une progressivité et des rétroactions au fur et à mesure de l'activité au sein de chaque cahier. La première page de travail n'est pas problématique. Elle permet à chaque élève de découvrir l'environnement de travail et de démarrer avec une première procédure. Les rétroactions permettent de soutenir l'engagement et la recherche de l'élève. Des évaluations sous forme de smileys souriants ou pas lui permettent de valider sa démarche. L'élève peut corriger sa réponse et redemander une évaluation par le système (il peut alors revenir sur ce qu'il a fait et se corriger avant de demander une nouvelle validation) ;
- ils sont partiellement adaptables et paramétrables. Les commentaires à destination des enseignants, accessibles à partir de la page d'accueil, présentent les objectifs d'apprentissage pour les élèves. Les procédures de résolution possibles, le contenu de chaque page et les principales rétroactions sont décrits. Ils donnent également accès à des paramètres qui permettent à l'enseignant d'adapter le travail à son contexte d'enseignement...

[10] En 2017, plusieurs cahiers de la collection e-pascaline sont disponibles. Un cahier « e-pascaline seule » sans tâche associée peut être utilisé à tous les niveaux, de même que le cahier situation-problème « Compter les clics de la e-pascaline » est utilisable du CP à la 6^{e}. Au cycle 2, un cahier est spécifique pour le CP « Les nombres avec la e-pascaline » et le cahier « Additionner avec la e-pascaline » se décline pour le CP et le CE1.
SOURY-LAVERGNE, S. (2014). *MOM pascaline et e-pascaline, une Mallette d'Outils Mathématiques pour la numération et le calcul en CP*. Rapport de l'Institut Français de l'Éducation.
Accessible à l'adresse : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees-13-14/mallette

Ces cahiers sont à utiliser en association avec la pascaline ainsi que du matériel pédagogique concret. Ils complètent l'utilisation de la pascaline en permettant, par exemple, de renforcer les techniques utilisées (entraînement de techniques), avec une grande possibilité d'autonomie pour les élèves.

III. LE TRAVAIL DANS LES CLASSES AVEC LA PASCALINE

Les premiers travaux de recherche menés en France sur l'utilisation de la pascaline pour l'apprentissage du système de numération ont été conduits par l'IFÉ – Institut Français de l'Éducation – sous la responsabilité de S. Soury-Lavergne[11]. Ils s'appuient sur les travaux conduits en Italie par M. Maschietto.
En partant de ces travaux, un groupe d'Auvergnats s'est constitué dans le cadre de la M.P.S.A. – Maison Pour la Science en Auvergne – et de l'I.R.EM. Il a étudié le rôle que pouvait jouer la pascaline dans les séquences d'enseignement du cycle 2 et du cycle 3. Le choix des participants, rassemblant enseignants du primaire, du secondaire, conseillers pédagogiques, formateurs et chercheurs en didactique et en mathématiques, a été de partir des pratiques effectives ordinaires des enseignants et d'étudier comment la pascaline pouvait être intégrée et contribuer aux apprentissages numériques, dans le cadre défini par les programmes scolaires.
Ainsi, pour le niveau CP, le point de départ a été d'utiliser la pascaline dans une progression existante pour l'apprentissage de la numération. Les participants du groupe, enseignant à ce niveau**,** ont étudié l'intégration de cet outil dans la progression des apprentissages au CP proposée par le manuel CAP Maths des éditions Hatier (2016).
On trouvera, en partie 1 de cette brochure, le compte rendu des six premières séances conduites par I. Noygues, enseignante au CP.
Au cycle 3, c'est une entrée par l'outil et la compréhension de son fonctionnement qui a été choisie comme moyen de réviser la numération et les opérations. En CM, elle peut être utilisée pour reprendre l'apprentissage de la numération avec les élèves en difficulté. En 6^e^, elle est choisie pour réviser les opérations, en particulier la soustraction. Les activités pour le cycle 3, proposées par S. Fleury et J. Métais dans leur classe, sont présentées en partie 2.
Les discussions au sein du groupe et les expérimentations menées en classe ont rendu nécessaire l'explicitation de fondements didactiques permettant de mener les analyses des séances et de les mettre en relation avec les attendus des nouveaux programmes. Des éclairages didactiques sont apportés ponctuellement en partie 1 et 2, avec la description des séances. Une présentation plus détaillée de l'ancrage théorique des travaux menés, issus des discussions au sein du collectif et rédigée par A. Noirfalise, constitue la partie 3 de cette brochure. Elle permet d'approfondir la proposition de la brochure sur des thèmes tels que : fonctions des nombres entiers, systèmes de numération, grandeurs et mesures et modélisation en mathématique.

---

[11] SOURY-LAVERGNE S., MASCHIETTO M., (2013). A la découverte de la « pascaline » pour l'apprentissage de la numération décimale. In C. Ouvrier-Buffet (Ed.), *39^e^ colloque de la COPIRELEM Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève*. Quimper, France.
SOURY-LAVERGNE S., (2017). Duos d'artefacts tangibles et numériques et objets connectés pour apprendre et faire apprendre les mathématiques. (HDR). ENS de Lyon, Lyon, France.

Partie 1.
La pascaline au cycle 2

Monique DEMAS
Professeur des écoles spécialisée E
École primaire publique de Saint-Mamet-la-Salvetat
Annie NOIRFALISE
I.R.E.M. de Clermont Ferrand
Isabelle NOYGUES
Professeur des écoles
École primaire publique de Saint-Mamet-la-Salvetat

Chapitre I.
LA PASCALINE AU MOMENT DES RITUELS

Résumé

En CP, comme à l'école maternelle, le moment des rituels permet d'installer des habitudes de vie, d'avoir du temps pour valider certains apprentissages et de favoriser une automatisation des savoirs. Lors de la première semaine de classe de CP, l'introduction fictive de la pascaline dans l'environnement des rituels permet aux élèves de se familiariser avec son image et avec l'une de ses fonctions.
Ainsi, lors de son introduction physique, il apparaît comme un outil de dénombrement.

I. DESCRIPTION DES RITUELS AVEC LA PASCALINE

Figure 7. Tableau des rituels de la classe de CP.

1. Ce que disent les programmes du cycle 2[12]

« Utiliser des outils mathématiques pour résoudre des problèmes concrets, notamment des problèmes portant sur des grandeurs et mesures. »

2. Introduction fictive de la pascaline dès la semaine de la rentrée

Afin de dénombrer les jours de classe écoulés depuis le début du mois en cours, tous les matins lors des rituels, un élève est chargé de déplacer une pince à linge d'une case sur la bande numérique, de mettre un jeton dans un seau et d'entourer sur le calendrier de la météo le numéro du jour en question. Suite à ces

[12] MEN BO spécial N° 11 du 26 novembre 2015

actions, il est demandé à l'élève de compter le nombre de jour d'école que nous avons eu depuis le début du mois en cours.

Figure 8. Éléments des rituels, bande numérique, seau de jetons et tableau météo.

Sur la pince à linge une petite pascaline est représentée. La 1re semaine de classe, les élèves ne savent pas encore de quoi il s'agit.
Le seau de jetons est vidé à la fin de chaque mois. Plus tard dans l'année, les élèves seront amenés à dénombrer la quantité de jours de classe qu'ils ont eue depuis le début du mois de septembre.
Chaque semaine, le responsable de ces actions change.

3. Introduction physique de la pascaline

Après avoir été présentée en tant qu'objet technique (cf. séances 1 et 2), elle est introduite physiquement dans les rituels.
Un nouveau rituel apparaît donc : tourner d'un clic la roue jaune de droite de la pascaline dans le sens des aiguilles d'une montre afin de rajouter chaque nouveau jour de classe au compteur.


Figure 9. Inscription du nombre 5 sur la pascaline.

À la fin de chaque mois, différentes actions sont à réaliser :

a) Dénombrer les jetons présents dans le seau (faire le compte des unités)


Figure 10. Dénombrement des jetons présents dans le seau.

b) Vérifier si le cardinal écrit sur la pascaline et sur la bande numérique correspond à la mesure de cette quantité

Figure 11. Mise en correspondance de l'affichage de la pascaline avec le nombre sur la bande numérique.

c) Noter sur le tableau de la météo le nombre de jours de classe qu'il y a eu dans le mois achevé

Figure 12. Dénombrement du nombre de jours de classe dans le tableau météo.

d) Ainsi, chaque mois écoulé est affiché sous le tableau des rituels avec la photo de la pascaline affichant le nombre de jours de classe qu'il y a eu dans ce mois.

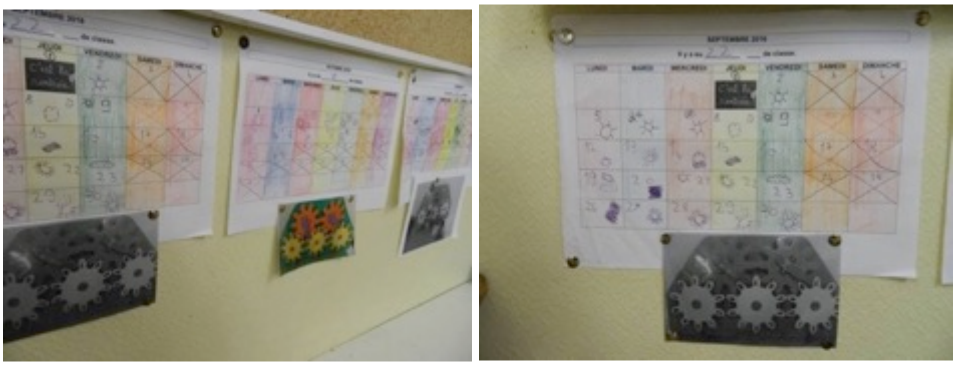


Figure 13. Tableaux météo de chaque mois associés à une image de pascaline affichant le nombre de jours de classe dans le mois.

4. Évolution quant à l'utilisation de la pascaline lors des rituels

4.1 Dénombrer les jours de classe que l'on a eu depuis le début du mois de septembre

Lorsque le 100^{e} jour de classe est arrivé, l'enseignant place les élèves face au problème suivant : « Combien avons-nous eu de jours de classe depuis le début du mois de septembre ? »
Chaque élève est invité à répondre à la question. L'enseignant note sur un papier la réponse donnée par chacun. En majorité, les élèves donnent le nombre correspondant à la quantité de jours de classe qu'il y a eu en septembre. L'enseignant fait remarquer que ce nombre correspond seulement à la quantité de jours de classe du mois de septembre. Pour les autres mois, il demande aux élèves où a été noté le nombre de jours de classe. Sans hésitation, ils indiquent les affichages sous le tableau des rituels.

Figure 14. Les images de pascalines associées aux tableaux météo.

Il reformule alors sa question : « Je souhaiterais savoir combien vous avez eu de jours de classe depuis que vous êtes en CP ? Comment faire pour répondre à cette question ?»
Afin de les aider, l'enseignant propose aux élèves, pour chaque mois écoulé, de remplir une boîte avec des cubes pour constituer la collection de jours de classe.

Figure 15. Mise en correspondance mois par mois des quantités de cubes et des nombres désignant le nombre de jours passés à l'école.

L'enseignant pose à nouveau la question : « Combien de jours de classe avez-vous eu depuis que vous êtes entrés au CP ? Comment faire pour répondre à cette question ? »
Un élève répond qu'il faut compter tous les cubes qui sont dans les boîtes.
L'enseignant valide cette proposition et demande à un élève de venir regrouper tous les cubes dans un même contenant en disant : « 22 » et encore « 12 » et encore « 19 » et encore « 12 » et encore « 21 » et encore « 13 » et encore « 1 ».

Figure 16. Collection de tous les cubes.

Il demande alors aux élèves de formuler ce qu'ils vont avoir à faire : « Il faut compter combien il y a de cubes en tout pour savoir combien nous avons eu de jours de classe depuis que nous sommes au CP. »

Les élèves travaillent par groupe de deux (ici, il y a six groupes). Chaque groupe reçoit une boîte et l'enseignant précise que chaque boîte contient la même quantité de bâtonnets qu'il y a de cubes dans le seau vert. Ces boîtes ont été préparées en amont par l'enseignant.

Figure 17. Préparation du matériel pour les élèves, des collections de même cardinal.

Certains groupes dénombrent les bâtonnets unité par unité et d'autres vont chercher des élastiques pour faire des paquets de 10.

Au moment de la mise en commun, chaque groupe est amené à indiquer à l'oral combien il y a de bâtonnets dans sa boîte. L'enseignant écrit en lettres les réponses dictées par chaque groupe et demande à chaque groupe de lui dicter la réponse en chiffres.
Voici les réponses obtenues :

a) Pour les groupes qui ont fait des paquets de 10 :
- l'un dit « *10 paquets de dix* ou *10 dizaines* ». Ici le groupe dit ne pas savoir combien ça fait de cubes en tout
- un autre dit « *cent un » et* écrit « *101* »
- un dernier dit « *cent deux » et* écrit « *102* »

b) Pour les groupes qui ont dénombrer les bâtonnets 1 par 1 :
- un groupe ne se rappelle plus et doit tout recompter pour finir par annoncer : « *quatre vingt seize »* écrit « *4 20 16*»
- un autre dit « *cent deux »* écrit « *120* »
- un autre dit « *cent un »* écrit « *101* »

L'enseignant amène les élèves à se rendre compte qu'aucun groupe n'a la même réponse alors que tous les groupes devraient trouver la même quantité de bâtonnets. Les élèves en concluent qu'ils se sont trompés. Comment faire alors pour ne pas se tromper ? Il s'agit ici d'arriver à la conclusion qu'il faut faire des paquets de 10 afin de limiter les erreurs et de gagner du temps. Ensuite, une fois la collection organisée en paquets de 10 et éléments tout seuls, il est demandé à chaque groupe d'indiquer sur la pascaline la quantité de bâtonnets présents dans leur boîte.

Un groupe incrémente seulement la roue jaune de droite dans le sens des aiguilles d'une montre (celle des unités) de 10 clics à chaque paquets de 10 dénombré, les autres incrémentent la roue jaune du milieu dans le sens des aiguilles d'une montre (celle des dizaines) d'1 clic dès qu'un paquet de 10 bâtonnets est dénombré. Deux groupes trouveront ici *101* et *103* au lieu de *100.*

L'enseignant aura pris soin de son côté de constituer les paquets de 10 cubes afin de réaliser une correspondance terme à terme entre les différentes collections au moment de la mise en commun.

Lors de la mise en commun, chaque élève prend une pascaline afin d'afficher la quantité de cubes (ou de bâtonnets) présents dans la boîte. À chaque paquets de 10 cubes mis sur l'affiche, agir sur la pascaline. Les élèves ressentent une résistance au moment de passer de 9 paquets de 10 à 10 paquets de 10. Ils observent que la roue jaune de gauche a tourné et que la pascaline affiche le nombre 100.

Figure 18. Affichage des décompositions de 100 en dizaines et des conversions.

4.2 Constituer une collection intermédiaire de bâtonnets de glace

À compter du 100e jour de classe depuis le début du CP, deux pascalines seront utilisées au moment des rituels.

Figure 19. Association affichage de la pascaline et collection de bâtonnets structurée en dizaine.

La 1re dénombrera les jours de classe écoulés dans le mois en cours (cf. Figure 19). Pour ce faire, l'élève responsable mettra un bâtonnet de glace en face de la roue des unités pour chaque nouveau jour de classe du mois en cours. Quand il y aura 10 bâtonnets isolés, il constituera un paquet de 10 avec un élastique et il le mettra face à la roue des dizaines.

La 2e dénombrera les jours de classe écoulés depuis le début du CP.

Figure 20. Dix lignes de cubes emboités par 10, rassemblées par un élastique, en regard de la pascaline affichant 100.

Sous la roue jaune de gauche (celle des centaines), apparaîtra la centaine constituée précédemment (cf. Figure 20). Puis, pour chaque nouveau jour de classe, l'élève responsable mettra un cube sous la roue jaune de droite (celle des unités). Quand il le pourra, il constituera un paquet de 10 cubes qu'il placera sous la roue jaune du milieu (celle des dizaines).

Chaque matin lors des rituels, l'élève responsable du dénombrement avec les pascalines sera amené :

a) d'une part à verbaliser ce que représente l'affichage de la pascaline ;

Exemple : « Aujourd'hui c'est le 159^{e} jour de classe. Depuis que nous sommes rentrés au CP, nous avons eu 159 jours de classe,
159 ça veut dire 100 et encore 50 et encore 9,
159 c'est 1 paquet de 100 et encore 5 paquets de 10 et encore 9 tout seuls,
159 c'est 1 centaine et encore 5 dizaines et encore 9 unités. »

b) d'autre part, d'écrire de différentes façons, le cardinal de la collection dénombrée.

Et ainsi de suite jusqu'à la fin de l'année scolaire.

Figure 21. Production d'élève pour le nombre 159, associée à la pascaline et une collection organisée de cubes.

II. ACTIVITÉS DE DÉNOMBREMENT AVEC LES DIFFÉRENTS OUTILS

1. Tâche à accomplir

Au cours de ces activités, la même tâche est accomplie : « Compter le nombre de jours d'école écoulés dans le mois en cours. »

2. Quatre techniques mises en place et description

- Lecture du nombre écrit sur la bande numérique après déplacement de la pince à linge
- Dénombrement de la collection de jetons présents dans le seau
- Dénombrement du nombre de cases météo remplies
- Lecture du nombre écrit sur la pascaline après rajout d'un clic

Avec le tableau météo et le seau de jetons, il s'agit du dénombrement d'une collection constituée au fil des jours par ajout d'une unité, mais chaque jour on dénombre une nouvelle collection.

- Dans le tableau météo, la collection à dénombrer est organisée de façon à faciliter l'énumération de cette collection constituée des cases où les numéros sont entourés.

- Dans le seau, la collection n’est pas ordonnée. Aussi les élèves doivent élaborer une technique d’énumération de la collection : organisation en ligne du contenu du seau et parcours de gauche à droite pour dénombrer ; déplacement des jetons au fur et à mesure du dénombrement ; organisation des jetons en constellation (plus tard car démarche plus élaborée)[13].

Avec la bande numérique comme avec la pascaline, la lecture s’appuie sur la suite ordonnée des nombres. L’ajout d’une unité correspond au nombre suivant.

3. Technologie

Lors de la mise en commun, on pourrait mettre les jetons du seau sur la bande numérique, puis sur le tableau météo pour montrer qu’on a bien le cardinal de la même collection. Et donc montrer que ces techniques sont pertinentes pour accomplir la tâche demandée.

Figure 22. Différents affichages du nombre de jours de classe.

Si on travaille sur une collection immatérielle, ici la collection des jours de classe écoulés, il s’agit d’une grandeur particulière : *quantité de jours de classe écoulés*. En début de CP, il n’est pas habituel de travailler sur une quantité abstraite[14] comme celle-ci. On a donc recours à 4 collections intermédiaires pour garder en mémoire la valeur de cette grandeur qui est le cardinal commun à chacune de ces collections :

- celle des cases de la bande numérique jusqu’à la pince à linge « pascaline »,
- celle des jetons dans le seau,
- celle des cases du tableau météo,
- et celles des clics de la pascaline.

Parmi ces 4 collections intermédiaires situées entre la grandeur sur laquelle on travaille (la quantité de jours écoulés) et le nombre qui mesure cette grandeur, les 3 premières sont matérielles et la 4e est immatérielle.
À tout moment, les 3 premières collections peuvent être à nouveau dénombrées car elles sont visibles et pérennes. De fait, elles sont plus fiables et concrètes pour des élèves fragiles.
Ce n’est pas le cas pour la collection de clics sur la pascaline. Il s’agit d’une collection invisible et éphémère. En effet, il ne reste plus de trace de la grandeur « *quantité de jours de classe écoulés* » dans la mesure où les jours de classe passés ne sont plus visibles.

4. Institutionnalisation

La pascaline est un outil de mesure de grandeur. Tout comme la bande numérique, elle donne directement la mesure de la grandeur « *quantité de jours de classe écoulés* » à laquelle on s’intéresse. Elle garde mémoire du cardinal de la collection dénombrée contrairement aux autres outils de dénombrement qui gardent mémoire de toute la collection.

---

[13] Voir Partie 2. « Lexique : de l’énumération au dénombrement, quelques définitions et remarques didactiques » page 89.
[14] Voir Partie 2. « La mesure des grandeurs » page 94.

5. Entraînement des techniques

Suite à ce travail, l'enseignant a proposé aux élèves de travailler en binôme afin de dénombrer d'autres collections de bâtonnets donnés en vrac. Les groupes ont organisé leur collection en paquets de 10 et en éléments tout seuls. Ils devaient afficher la mesure de cette quantité sur la pascaline et l'écrire sous différentes formes sur l'ardoise.
Par exemple pour 75 :

a) dessiner les paquets
b) 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 5 = 75
c) 70 + 5 = 75

6. Évaluation

Pour l'évaluation, chaque élève individuellement a eu le même travail à faire.

Chapitre II.
SÉANCE 1 : DÉCOUVERTE DE L'OBJET « PASCALINE »

Résumé

La séance présentée ci-dessous vise à permettre aux élèves de découvrir la pascaline comme un objet technique et à commencer d'identifier son mode d'emploi et ses fonctions.
Cette séance s'appuie sur les travaux conduits dans le cadre des projets « Plan sciences en Côte d'Or » et « Mallette d'Outils Mathématiques » conduits par l'IFE de 2012 à 2014[15].

I. PRÉSENTATION DU TRAVAIL CONDUIT AVEC LES ÉLÈVES DE CP

1. Ce que disent les programmes du cycle 2[16]

« - Observer et utiliser un objet technique et le dessiner.
- Identifier son domaine, son mode d'emploi et ses fonctions. »

2. Objectif de la séance

Découverte de l'objet « pascaline ».

3. Tâche à accomplir

Décrire l'objet « pascaline » et faire des hypothèses sur ses éventuelles fonctionnalités.

4. Préliminaires et poursuite prévue

Les élèves découvrent pour la première fois l'objet pascaline. Cette séance sera suivie de nombreuses séances pour se familiariser avec son usage comme outil mathématique.

5. Organisation et matériel

Alternance de phases individuelles et collectives.
Une pascaline par élève.

[15] Les ressources pédagogiques relatives à la pascaline, développées lors du projet Plan science en Côte d'Or sont présentées en ligne : http://ife.ens-lyon.fr/sciences21/ressources/sequences-et-outils/pascaline-CP. Le rapport d'expérimentation d'une action du projet Mallette d'Outils Mathématiques est publié sur le site de l'IFE : SOURY-LAVERGNE S., (2014). MOM Mallette d'Outils Mathématiques, version pascaline et e-pascaline, Rapport IFE : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees-13-14/mallette

[16] MEN BO spécial N° 11 du 26 novembre 2016

II. DESCRIPTION DE LA SÉANCE

1. Première partie : phase individuelle de découverte

Les durées indiquées sont approximatives et peuvent varier.

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
L'enseignant distribue, à chaque élève, une pascaline dans sa boîte. « Du matériel pour la classe est arrivé, à votre avis, de quoi s'agit-il ? Vous avez un peu de temps pour le manipuler et le découvrir individuellement. »	Les élèves ouvrent la boîte. La plupart l'ont mise dans le bon sens au départ : ils ont eu la tâche de sortir seuls l'objet de son carton. Les élèves ont fait tourner les roues très vite dans tous les sens avec le pouce ou l'index ou tous les doigts.	Au maximum 5 min

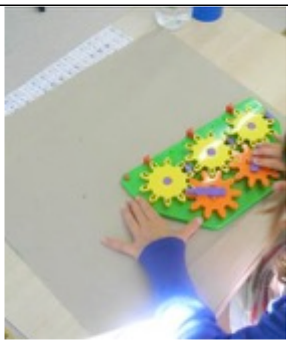


Figure 23. Un élève n'oriente pas correctement sa pascaline.

Figure 24. Un élève tourne les roues en manipulant la flèche violette d'une roue orange.

Figure 25. Manipulation la main à plat sur la roue.

On laisse le soin à chaque élève de sortir l'objet de sa boîte afin de ne pas induire son positionnement sur la table. Le temps imparti ne doit pas être trop long, moins de 5 min, sinon les élèves sont assez vite démobilisés.

2. Deuxième partie : phase collective orale

2.1 Description de la pascaline

Les élèves décrivent, sans le nommer pour le moment, l'objet qu'ils ont entre les mains à partir de questions précises posées par l'enseignant.

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
« Que voyez-vous sur cet objet ? »	« 3 blocs violets/3 pièges à souris/des tapettes » « des ressorts sous les blocs violets/des fils » « des chiffres/des numéros/des nombres jusqu'à 9 » « des fleurs (3 jaunes et 3 oranges) : des tournesols ; des jonquilles/ des soleils/des fleurs nombres jaunes/des ronds jaunes et des ronds oranges/des roues/des pétales avec des nombres » « 3 triangles rouges » « 2 flèches violettes » « 1 goutte rouge » → cette remarque concerne « la virgule rouge » en bas à droite de l'objet « des tourniquets orange et jaunes »	10 min

2.2 Fonctionnalité et fonctionnement de la pascaline

Cet échange verbal concernant la description de l'objet se poursuit, toujours à partir de questions précises de l'enseignant, pour faire des hypothèses sur sa fonctionnalité et son fonctionnement.
L'enseignant sera attentif à demander aux élèves de justifier leurs hypothèses, à les valider ou à les invalider.
Les élèves ne doivent pas rester sur une représentation erronée correspondant à une hypothèse impossible : par exemple ce n'est pas une pendule ou un réveil car il n'y a pas les nombres 10, 11 et 12.
Les propositions des élèves ne sont pas toujours dans le cadre de l'objectif poursuivi qui est d'utiliser la pascaline pour faire des dénombrements.

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
« À quoi sert cet objet ? » « As-tu déjà vu un moulin ? »	Remarques faites par les élèves et qui ne permettront pas d'apporter d'éléments tangibles concernant la fonctionnalité de cet objet : « c'est un réveil, une pendule, qui fait du bruit quand on tourne la roue : tic, tic… » ; « une machine/un tourniquet » ; « ça peut tourner » ; « c'est pour jouer, s'amuser » ; « c'est un moulin » (demander d'expliquer) ; « c'est un moulin car il y a des roues qui tournent. » « Oui, à Paris *Le Moulin Rouge* » ! Remarques faites par les élèves allant dans le sens de l'usage qui sera fait de l'objet, à savoir le dénombrement d'une collection : « ça nous dit combien on a eu de jours d'école depuis la rentrée » ; « les triangles rouges servent à montrer le nombre de jours d'école depuis la rentrée. »	10 min

Remarques faites par rapport à l'usage qui a été fait de la représentation de la pascaline au moment des rituels :
Dès la rentrée, au moment des rituels, le comptage des jours de classe dans le mois a été mis en place. Tous les matins, un élève doit mettre un jeton dans un seau pour chaque jour de classe « entamé » et déplacer d'une case sur la bande numérique, une pince à linge sur laquelle figure une représentation de la pascaline.
L'élève responsable de ceci, compte tous les jetons du seau ainsi que les cases du mois en cours sur lesquelles on a dessiné la météo du jour. Il vérifie alors que ces deux nombres correspondent au nombre sur lequel se situe la pince à linge.

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
« Dans quel sens faut-il tenir cet objet ? » « À plat, oui mais dans quel sens ? »	« Il faut que les chiffres soient à l'endroit pour qu'on puisse les lire. Il faut le poser à plat sur la table. » « Les roues jaunes vers soi ; les triangles rouges vers soi. » Remarque d'un élève à qui l'objet fait penser à	10 min

Aucun élève n’a fait référence aux écrits sur le socle de la pascaline (ZERO+1, noté en vert sur fond vert, qui est peu visible).	sa console.  *Figure 26. Orientation correcte de la pascaline.*	
« Dans quel sens faut-il tourner les roues ? »	« Dans le sens des aiguilles de la pendule » : information donnée par l’adulte en référence à leur description (c’est un réveil, c’est une pendule).	
« Que se passe-t-il quand on tourne doucement mais longtemps la roue jaune de gauche ? »	« Le ressort violet bouge quand on fait tourner la roue jaune de gauche et quand un pétale chiffre passe sur le ressort. »	
« Que se passe-t-il quand on tourne doucement mais longtemps la roue jaune du milieu ? »	« La roue orange de gauche tourne aussi et à un moment la roue jaune de gauche tourne aussi, entraînée par la flèche violette. Le ressort violet bouge quand on fait tourner la roue jaune du milieu et quand un pétale chiffre passe sur le ressort. »	
« Que se passe-t-il quand on tourne doucement mais longtemps la roue jaune de droite ? »	« Le ressort violet bouge quand on fait tourner la roue jaune de droite et quand un pétale chiffre passe sur le ressort. » « La roue orange de droite tourne aussi, puis à un moment la roue jaune du milieu tourne aussi entraînée par la flèche violette, puis la roue orange de gauche tourne aussi, puis la roue jaune de gauche tourne aussi entraînée par la flèche violette de la roue orange de gauche : au bout d’un moment, toutes les roues tournent (5 roues). »	

2.3 Synthèse écrite de l'échange

Sous la dictée des élèves, l’enseignant note sur différentes affiches collectives les réponses aux questions abordées précédemment :
« Que voyez-vous sur cet objet ? »
« À quoi sert cet objet ? »
« Que se passe-t-il quand on tourne telle ou telle roue ? ».
Cette dernière question est abordée grâce aux questions suivantes :
« Dans quel sens faut-il tourner les roues ? »
« Que se passe-t-il quand on tourne doucement la roue jaune de gauche pendant longtemps, longtemps ? »
« Que se passe-t-il quand on tourne la roue jaune du milieu doucement pendant longtemps, longtemps ? »
« Que se passe-t-il quand on tourne la roue jaune de droite doucement pendant longtemps, longtemps ? »

Figure 27. Affiches rédigées par l'enseignant à partir des réponses des élèves.

3. Troisième partie : phase individuelle (15 min)

L'enseignant demande aux élèves de dessiner individuellement l'objet en permettant aux élèves de le regarder autant qu'ils le souhaitent. L'objectif de cette activité de dessin est d'amener l'élève à observer minutieusement les caractéristiques de l'objet pour pouvoir le reproduire. En même temps, cela donne à l'enseignant des informations sur les éléments pris en compte ou pas par les élèves. Cette tâche de dessin est difficile. Pour aider les élèves, l'enseignant leur distribue une feuille sur laquelle est reproduit le contour de la pascaline, à une échelle plus petite (format A5 de préférence, cf. Annexe II page 120).
Les élèves dessinent au crayon à papier. L'adulte passe pour leur demander s'ils ont bien tout représenté (se rappeler de la description collective en mettant sa tête entre ses mains pour mieux se concentrer).
L'utilisation des couleurs peut être proposée dans un second temps. En la proposant trop tôt, les élèves se concentrent sur le choix des couleurs et pas sur les composantes de la machine et leur reproduction.
La démarche qui consiste à leur demander de bien observer l'objet, de verbaliser collectivement ce qu'ils ont vu puis de le représenter vise à les familiariser avec les différentes composantes de la machine sur lesquelles un vocabulaire précis sera mis en place lors de la séance suivante.

Les productions des élèves vont de dessins totalement déstructurés (cf. Figure 28) à des productions où tous les chiffres sont représentés dans le bon ordre sur les dents (cf. Figure 29). Certains dessins amorcent une représentation d'une interaction entre les dents (cf. Figure 30).

Figure 28. Un dessin qui ne présente pas la structure de la machine.

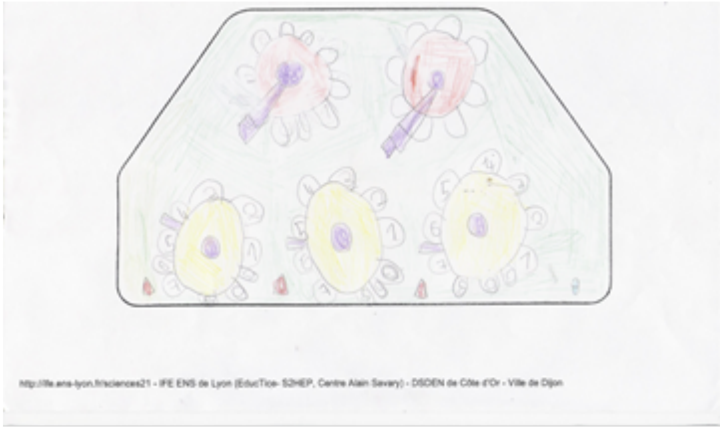


Figure 29. Présence de toutes les dents et les chiffres dans l'ordre sur ce dessin d'élève de CP.

Figure 30. Représentation de l'action des roues du haut sur les roues du bas.

Chapitre III.
SÉANCE 2 : MISE EN PLACE DU LEXIQUE RELATIF À L'OBJET PASCALINE

Résumé

La séance présentée ci-dessous vise à introduire et partager le lexique relatif à l'objet pascaline qui sera utilisé dans les séances ultérieures.

I. PRÉSENTATION DU TRAVAIL CONDUIT AVEC LES ÉLÈVES DE CP

1. Ce que disent les programmes du cycle 2 [17]

« Étendre ses connaissances lexicales…
Mémoriser et utiliser des mots nouvellement appris…
Décrire un objet technique en utilisant un vocabulaire précis. »

2. Objectif de la séance

Fixer un vocabulaire précis relatif à l'objet pascaline : roues orange - roues jaunes - chiffres - nombres - flèches - repères triangulaires - virgule - dents - clics - taquets.

3. Tâche à accomplir

Réaliser une affiche collective, à laquelle on pourra se référer, avec le vocabulaire commun relatif à l'objet pascaline.

4. Les préliminaires à la séance

L'outil pascaline a été introduit dès la première semaine de classe, lors des rituels du matin, comme outil de dénombrement des jours de classe écoulés pour chaque mois en cours.
La première séance a été consacrée à l'introduction de la pascaline comme objet technique.

5. Organisation et matériel

Les affiches collectives réalisées au cours de la séance 1 sont visibles. Les élèves ont à leur disposition leur dessin de la pascaline fait à la fin de cette séance 1.
Le travail est collectif durant toute la séance.

[17] MEN BO spécial N° 11 du 26 novembre 2016

II. DESCRIPTION DE LA SÉANCE

1. Phase de remobilisation

Cette partie se passe dans le coin des rituels.
C'est une phase d'échanges collectifs.
Les élèves ont à leur disposition les affiches collectives élaborées lors de la séance 1, rassemblant les réponses aux questions : « Que voyez-vous sur cet objet ? » « À quoi sert cet objet ? » « Que se passe-t-il quand on tourne telle ou telle roue ? ».

Les durées indiquées sont approximatives et peuvent varier.

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
L'enseignant montre une pascaline aux élèves rassemblés devant lui. « Que voyez-vous sur l'objet ? » « À quoi sert cet objet ? »	Face à l'objet tenu par l'enseignant, les élèves ont su retrouver les différents termes qu'ils ont utilisés lors de la précédente séance pour décrire l'objet. Les élèves ont également su lister les différentes fonctions qu'ils ont pu attribuer à l'objet lors de la séance précédente. Ils ont aussi su expliquer pourquoi telle hypothèse n'était pas probable : « exemple de la pendule, du réveil ». Ils ont aussi su dire ce qui se passait quand on tournait telle ou telle roue.	10 min

2. Phase collective relative à l'exploitation des dessins de l'objet réalisés par les élèves

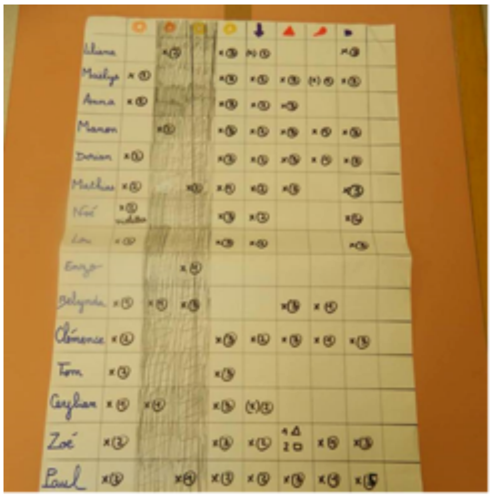


Figure 31. Tableaux récapitulatifs des éléments pris en compte dans les dessins des élèves.

L'enseignant aura pris soin en amont d'analyser les dessins de ses élèves afin d'établir un tableau à double entrée (cf. Figure 31) avec une colonne correspondant à chacun des éléments représentés par au moins un des élèves (de façon pertinente ou non : roues orange avec chiffres et roues orange sans chiffres) et une ligne par élève.

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
L'enseignant présente à la classe le tableau à double entrée qu'il a élaboré : une ligne par élève avec son prénom, une colonne pour chaque élément représenté sur les dessins des élèves. L'enseignant demande à chaque élève de venir au tableau avec son dessin pour le décrire. Il pose des questions afin d'aider à cette description : « Y a-t-il : des roues jaunes avec des chiffres ? Sans chiffres ? Combien ? Des roues orange avec chiffres ? Sans chiffres ? … » Il note dans le tableau quels sont les éléments constitutifs du dessin décrit.	Chacun passera au tableau avec son dessin. Grâce aux questions posées par l'enseignant, chaque élève a pu décrire son dessin. Le tableau à double entrée a pu être rempli.	30 min

Ce tableau à double entrée a permis de guider chaque élève dans la description de son dessin.
Cette description est longue car individuelle. Mais ce tableau a permis de rendre plus lisible la synthèse des différents dessins.
Cette phase permettra d'éliminer deux colonnes ne correspondant pas à ce qu'il y a réellement sur la pascaline : les roues orange avec chiffres et les roues jaunes sans chiffres.

3. Mise en place du vocabulaire spécifique à la pascaline (10 min)

La séance se terminera par la mise en place du vocabulaire spécifique à la pascaline.
Ce dernier est apporté par l'enseignant qui a confectionné des étiquettes grand format. Ces étiquettes ont été mises en correspondance avec les différents éléments d'une pascaline grand format affichée au mur (Figure 32, image et étiquettes à photocopier reproduites en Annexe II page 120 et Annexe IV page 122).

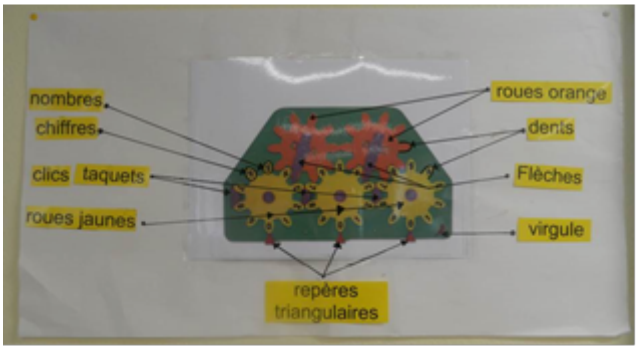


Figure 32. Affichage d'une image de pascaline légendée.

Le nom de cet objet sera donné aux élèves avec l'explication de son origine :
« Un scientifique auvergnat né à Clermont-Ferrand, Monsieur Blaise PASCAL, a inventé une machine à calculer il y a très longtemps. Cet objet porte ce nom en souvenir de cet homme. »[18]

[18] Apports historiques sur Blaise Pascal, voir "Avant-propos" rédigé par T. Lambre, page 5.

Chapitre IV.
SÉANCE 3 : LA PASCALINE OUTIL DE DÉNOMBREMENT DE COLLECTIONS JUSQU'À 9 ÉLÉMENTS

Résumé

Dans cette séance, les élèves vont être amenés à manipuler la pascaline comme outil de dénombrement de collections jusqu'à 9 éléments.[19]

I. PRÉSENTATION DU TRAVAIL CONDUIT AVEC LES ÉLÈVES DE CP

1. Ce que disent les programmes au cycle 2[20]

« Mathématiques [...]
Nombres et calculs [...]
Attendus de fin de cycle [...]
- Comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer, ordonner, repérer, comparer.
- Nommer, lire, écrire, représenter des nombres entiers.
- Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul.
- [...]

Connaissances et compétences associées	**Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève**
Comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer, ordonner, repérer, comparer	
Dénombrer, constituer et comparer des collections. Utiliser diverses stratégies de dénombrement.	Dénombrer des collections en les organisant et désigner leur nombre d'éléments [...]

[...] »

2. Objectifs

- Apprendre à manipuler correctement la pascaline : le placement de la machine devant soi, le placement des mains sur l'objet, le placement des doigts et le respect du rituel verbal décrit dans le déroulement de la séance.
- Utiliser la pascaline comme outil de dénombrement qui fait apparaître le cardinal d'une collection.

3. Tâche

Dénombrer une collection d'au plus 9 éléments à l'aide de la pascaline.

---

[19] Séances analysées dans SOURY-LAVERGNE, S., NOYGUES, I. (2017). La pascaline comme entrée dans une formation sur l'enseignement de la numération et du calcul au CP. In *XXXXIII[e] colloque de la COPIRELEM*. Le Puy-en-Velay.
[20] MEN BO spécial N° 11 du 26 novembre 2016, pages 75 et 76

4. Préliminaires et poursuite prévue

Cette séance suit la présentation de la machine aux élèves. Au cours de cette séance, les élèves utilisent pour la première fois la pascaline comme outil mathématique. Cette séance est à reproduire plusieurs fois.

5. Organisation et matériel

Alternance de phases individuelles et collectives
Une pascaline par élève
Des cubes et une boîte métallique pour l'enseignant.

II. DESCRIPTION DE LA SÉANCE

Cette séance 3, ainsi que la suivante (séance 4) ont une structure analogue.

1. Lancement de la séance : mise en situation avec la pascaline

L'enseignant met les élèves en situation d'utiliser la pascaline. Il formule pour tous les élèves une suite d'instructions. C'est la première fois qu'il formule l'action à venir pour les élèves. L'enseignant décrit sa propre action pour que les élèves fassent la même chose.

Les durées indiquées sont approximatives et peuvent varier.

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
« Je sors la pascaline de sa boîte et je la pose devant moi dans le bon sens. Je mets toutes les roues à zéro. Je commence par la roue jaune de droite. Je tourne la roue jaune de droite d'un clic dans le sens des aiguilles d'une montre pour faire *et encore 1*. »	Les élèves font les mêmes gestes que l'enseignant.	3 min

2. Consigne relative à la tâche

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
« Vous allez accompagner mes actions c'est-à-dire qu'à chaque fois que je mettrai un cube dans la boîte vous entendrez un bruit et vous ferez tourner la roue jaune de droite d'un clic dans le sens des aiguilles d'une montre. Je ferai cela sans parler. » L'enseignant est face aux élèves.	Un élève est invité à dire aux autres ce qu'il a compris de la consigne donnée par l'enseignant.	6 min

3. Description de l'activité

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
L'enseignant demande aux élèves de mettre l'outil à « zéro » avant de commencer le dénombrement. Il passe dans les rangs pour s'assurer que toutes les pascalines sont à « zéro ». L'enseignant met dans une boîte des cubes, les uns après les autres (jusqu'à 9 cubes).	Les élèves vérifient que leur outil est à « zéro ». À chaque bruit de cube tombant dans la boîte, chaque élève doit faire tourner la roue jaune de droite d'un clic dans le	10 min

Quand l'enseignant a terminé, il demande aux élèves de lui montrer leur pascaline afin qu'il puisse lire le nombre affiché et demande à un élève de lire ce nombre. L'enseignant demande aux élèves : « C'est quoi ce nombre ? » « En êtes-vous sûrs ? Comment le vérifier ? »	sens des aiguilles d'une montre. Les élèves montrent leur pascaline. « C'est le nombre de cubes tombés dans la boîte. » « Il faut les compter. »	

4. Validation

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
Pour vérifier s'il s'agit du nombre de cubes présents dans la boîte, on va effectivement compter ces cubes. « En tombant dans la boîte, les cubes ont fait un son. Il y a autant de cubes dans la boîte que de sons entendus. Chaque élève a fait autant de clics que de sons entendus. Ainsi, sur la pascaline, le nombre écrit correspond au nombre de dents qui ont été tournées. Et le nombre de dents tournées correspond au nombre de clics réalisés. Ces clics correspondent au nombre de sons entendus et donc aux nombres de cubes dans la boîte. »	Les élèves participent au dénombrement des cubes présents dans la boîte.	5 min

Cette validation permettra de voir que la pascaline est un outil efficace pour dénombrer les cubes tombés dans la boîte.

5. Éclairage pour les enseignants à propos de la justification de la technique

« Pourquoi la pascaline donne-t-elle le nombre de cubes tombés dans la boîte ? »
Cette question est à traiter explicitement avec les élèves.
En tombant dans la boîte, les cubes ont fait un son. Il y a autant de cubes dans la boîte que de sons entendus. Chaque élève a fait autant de clics que de sons entendus. Ainsi, sur la pascaline, le nombre écrit correspond au nombre de dents qui ont été tournées. Et le nombre de dents tournées correspond au nombre de clics réalisés. Ces clics correspondent au nombre de sons entendus et donc aux nombres de cubes dans la boîte.
On a donc 4 collections qui ont le même nombre d'éléments : la collection des cubes, la collection des sons produits par les cubes en tombant dans la boîte, la collection de clics, la collection des dents tournées. On peut lire ce nombre sur la pascaline.

Il s'agit d'amener les élèves à comprendre que le nombre affiché face aux repères triangulaires est le cardinal de ces différentes collections.

III. PROLONGEMENTS POSSIBLES ET REMARQUES DIDACTIQUES

Lors d'une même séance ou lors de la répétition de cette séance, il est utile de diversifier les collections à dénombrer que l'on proposera : une collection de bâtonnets de glace, une collection de jetons…
Il est important de proposer au moins deux matériels différents afin que le lexique introduit pour décrire les manipulations avec l'un ne soit pas interprété comme spécifique du matériel. Il convient de faire en sorte que les élèves apprennent à utiliser les mêmes mots (Unités de Numération) dans des contextes différents, à savoir avec des matériels différents.[21]
Il est indispensable de reproduire cette séance plusieurs fois, pour des collections jusqu'à neuf éléments, afin que les élèves s'entraînent à utiliser la pascaline comme outil de dénombrement. Ces activités de dénombrement seront l'occasion de revenir sur la justification de la technique si nécessaire. La séance 4 relative au dénombrement de collections de 10 éléments et plus pourra alors être envisagée.

[21] CHAMBRIS, C. (2014). Contribution à propos de la numération décimale aux travaux des groupes d'élaboration des projets de programmes C2, C3 et C4. Conseil Supérieur des Programmes, p. 30.
http://cache.media.education.gouv.fr/file/CSP/23/3/Chambris_Christine_-_MCF-_CSP_363233.pdf

Chapitre V.
SÉANCE 4 : LA PASCALINE OUTIL DE DÉNOMBREMENT DE COLLECTIONS

Résumé

Dans cette séance, les élèves vont être amenés à manipuler la pascaline comme outil de dénombrement de collections d'au moins 9 éléments.
Les activités proposées permettront de mettre en place une nouvelle technique pour connaître le nombre d'éléments d'une collection à laquelle on enlève ou ajoute un élément. Il s'agit ici d'inciter les élèves à indiquer la quantité d'éléments de la nouvelle collection ainsi créée sans dénombrer. Pour se faire, les élèves seront amenés à percevoir qu'enlever « 1 » revient à dire le nombre qui précède ou qu'ajouter « 1 » revient à dire le nombre qui suit le cardinal de la collection initiale.

I. PRÉSENTATION DU TRAVAIL CONDUIT AVEC LES ÉLÈVES DE CP

1. Ce que disent les programmes au cycle 2[22]

« Mathématiques
Nombres et calculs :
L'étude de relations internes aux nombres : comprendre que le successeur d'un nombre entier c'est « ce nombre plus un, […]
Les attendus de fin de cycle sont :
- Comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer, ordonner, repérer, comparer.
- Nommer, lire, écrire, représenter des nombres entiers.
- Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul. […]

Connaissances et compétences associées	**Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève**
Comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer, ordonner, repérer, comparer	
Dénombrer, constituer et comparer des collections. Utiliser diverses stratégies de dénombrement. - Procédures de dénombrement (utilisations d'unités intermédiaires : dizaines, centaines, en relation ou non avec des groupements). Repérer un rang ou une position dans une file ou sur une piste. Faire le lien entre le rang dans une liste et le nombre d'éléments qui le précèdent. - Relation entre ordinaux et cardinaux.	Dénombrer des collections en les organisant et désigner leur nombre d'éléments (écritures en unités de numération, écriture usuelle). Une importance particulière est accordée aux regroupements par dizaines, centaines, milliers. […] »

[22] MEN BO spécial N° 11 du 26 novembre 2016, page 75.

2. Objectifs

- Se familiariser avec l'usage de l'outil pour l'avoir bien en main.
- Percevoir la pascaline comme outil de dénombrement qui fait apparaître le cardinal d'une collection.
- Prendre conscience qu'enlever « 1 » revient à dire le nombre qui précède et ajouter « 1 » revient à dire le nombre qui suit.

3. Tâche

Dénombrer à l'aide de la pascaline une collection obtenue en ajoutant un élément, (respectivement en enlevant un élément), à une collection initiale dont on connaît la quantité d'éléments.

4. Préliminaires et poursuite prévue

Cette séance suit les premières séances consacrées à l'utilisation de la pascaline comme outil de dénombrement, à savoir la séance 3 et celles qui y sont analogues. Cette séance 4 est à reproduire plusieurs fois.

5. Organisation et matériel

Alternance de phases individuelles et collectives.
Une pascaline par élève.
Des cubes et une boîte métallique pour l'enseignant.

II. DESCRIPTION DE LA SÉANCE

Dans cette séance 4, la structure de la séance 3 est reprise dans un premier temps.
Ce n'est que dans un second temps que les apprentissages nouveaux sont abordés.

1. Première partie de la séance : reprise de la structure de la séance 3

1.1 Lancement de la séance : mise en situation avec la pascaline

L'enseignant met les élèves en situation d'utiliser la pascaline. Il formule pour tous les élèves une suite d'instructions. L'enseignant décrit sa propre action pour que les élèves fassent la même chose.

Les durées indiquées sont approximatives et peuvent varier.

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
« Je sors la pascaline de sa boîte et je la pose devant moi dans le bon sens. Je mets toutes les roues à zéro. Je commence par la roue jaune de droite. Je tourne la roue jaune de droite d'un clic dans le sens des aiguilles d'une montre pour faire *et encore 1*. »	Les élèves font les mêmes gestes que l'enseignant.	3 min

1.2 Consigne relative à la tâche

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
« Vous allez accompagner mes actions c'est-à-dire qu'à chaque fois que je mettrai un cube dans la boîte vous entendrez un bruit et vous ferez tourner la roue jaune de droite d'un clic dans le sens des aiguilles d'une montre. Je ferai	Un élève est invité à dire aux autres ce qu'il a compris de la consigne donnée par l'enseignant.	6 min

cela sans parler. » L'enseignant est face aux élèves.		

1.3 Description de l'activité

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
L'enseignant demande aux élèves de mettre l'outil à « zéro » avant de commencer le dénombrement. Il passe dans les rangs pour s'assurer que toutes les pascalines sont à « zéro ». L'enseignant met dans une boîte des cubes, les uns après les autres (jusqu'à 9 cubes). Quand l'enseignant a terminé, il demande aux élèves de lui montrer leur pascaline afin qu'il puisse lire le nombre affiché et demande à un élève de lire ce nombre. L' enseignant demande aux élèves : « C'est quoi ce nombre ? » « En êtes-vous sûrs ? Comment le vérifier ? »	Les élèves vérifient que leur outil est à « zéro ». À chaque bruit de cube tombant dans la boîte, chaque élève doit faire tourner la roue jaune de droite d'un clic dans le sens des aiguilles d'une montre. Les élèves montrent leur pascaline. « C'est le nombre de cubes tombés dans la boîte. » « Il faut les compter. »	10 min

1.4 Validation

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
Pour vérifier s'il s'agit du nombre de cubes présents dans la boîte, on va effectivement compter ces cubes. « En tombant dans la boîte, les cubes ont fait un son. Il y a autant de cubes dans la boîte que de sons entendus. Chaque élève a fait autant de clics que de sons entendus. Ainsi, sur la pascaline, le nombre écrit correspond au nombre de dents qui ont été tournées. Et le nombre de dents tournées correspond au nombre de clics réalisés. Ces clics correspondent au nombre de sons entendus et donc aux nombres de cubes dans la boîte. »	Les élèves participent au dénombrement des cubes présents dans la boîte.	5 min

Cette validation permettra de voir à nouveau que la pascaline est un outil efficace pour dénombrer les cubes tombés dans la boîte.

2. Deuxième partie de la séance : poursuite de l'activité

Dans cette deuxième partie, on travaille successivement sur les deux tâches suivantes :
- dénombrer, à l'aide de la pascaline, une collection obtenue en ajoutant un élément à une collection dont on connaît la quantité d'éléments,
- puis dénombrer, à l'aide de la pascaline, une collection obtenue en enlevant un élément à une collection dont on connaît la quantité d'éléments.

Les structures de travail pour étudier ces deux tâches sont semblables.

2.1 Description de l'activité relative à la première tâche

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
À partir de la situation précédente, l’enseignant précise : « On ne modifie pas le contenu de la boîte, on ne bouge pas la position de la pascaline. » L’enseignant poursuit le « jeu » : il met un cube de plus dans la boîte. « Je vais mettre 1 cube de plus dans la boîte. Vous allez accompagner mon action, je le ferai sans parler. » Il interroge : « Combien y a-t-il de cubes maintenant dans la boîte ? » Il demande aux élèves de montrer le résultat sur leur pascaline et à un élève de lire le résultat sur sa pascaline. Il interroge : « C'est quoi ce nombre ? » « En êtes-vous sûrs ? Comment le vérifier ? »	Les élèves ne bougent pas la position de leur pascaline qui affiche « 9 ». Au bruit du cube qui tombe dans la boîte, chaque élève doit faire tourner la roue jaune de droite d’un clic dans le sens des aiguilles d’une montre. « Il y en a 10. » « C'est le nombre de cubes dans la boîte. » « Il faut les compter. »	5 min

2.2 Validation et élaboration de la technique relative à la première tâche

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
Pour vérifier s’il s’agit du nombre de cubes présents dans la boîte, on va effectivement compter collectivement ces cubes. « En tombant dans la boîte, les cubes ont fait un son. Il y a autant de cubes dans la boîte que de sons entendus. Chaque élève a fait autant de clics que de sons entendus. Ainsi, sur la pascaline, le nombre écrit correspond au nombre de dents qui ont été tournées. Et le nombre de dents tournées correspond au nombre de clics réalisés. Ces clics correspondent au nombre de sons entendus et donc aux nombres de cubes dans la boîte. » L’enseignant interroge : « Avant de rajouter 1 cube dans la boîte, combien y en avait-il ? » « Qu’ai-je fait ? » « Combien y en a-t-il maintenant dans la boîte ? » L’enseignant énonce alors ce qu’il faut retenir si les élèves ne l’ont pas formulé :	Les élèves participent au dénombrement des cubes présents dans la boîte. Les élèves répondent : « Il y en avait 9. » « Tu en as rajouté 1 de plus. » « Il y en a 10. »	

« Le nombre d'éléments d'une collection à laquelle on rajoute un élément est le nombre qui suit le nombre d'éléments de la collection initiale. On peut lire ce nombre sur la pascaline. On pourrait le prévoir sans faire le dernier clic. »		

2.3 Description de l'activité relative à la deuxième tâche

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
L'enseignant laisse dans la boîte la collection de cubes que les élèves viennent de dénombrer avec leur pascaline.	Les élèves ne bougent pas la position de leur pascaline.	5 min
Il annonce : « Je vais enlever un cube de la boîte, je le ferai sans parler. Vous allez accompagner mon action sur votre pascaline. » L'enseignant enlève un cube de la boîte.	Chaque élève doit faire tourner la roue jaune de droite d'un clic dans le sens inverse à celui des aiguilles d'une montre.	
Il demande aux élèves de montrer le résultat sur leur pascaline et à un élève de lire le résultat sur sa pascaline.		
Il interroge : « C'est quoi ce nombre ? »	« C'est le nombre de cubes dans la boite. »	
« En êtes-vous sûrs ? Comment le vérifier ? »	« Il faut les compter. »	

2.4 Validation et élaboration de la technique relative à la deuxième tâche

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
Pour vérifier s'il s'agit du nombre de cubes présents dans la boîte, on va effectivement compter ces cubes.	Les élèves participent au dénombrement des cubes présents dans la boîte.	5 min
L'enseignant interroge : « Avant d'enlever 1 cube de la boîte, combien y en avait-il ? » « Qu'ai-je fait ? » « Combien y en a-t-il maintenant dans la boîte ? »	Les élèves répondent : « Il y en avait 10. » « Tu en as enlevé 1. » « Il y en a 9. »	
L'enseignant énonce alors ce qu'il faut retenir si les élèves ne l'ont pas formulé : « Le nombre d'éléments d'une collection à laquelle on enlève un élément est le nombre qui précède le nombre d'éléments de la collection initiale. On peut lire ce nombre sur la pascaline. On pourrait le prévoir sans faire le dernier clic. »		

2.5 Institutionnalisation relative aux deux tâches

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves		Durée
« Le nombre d'éléments d'une collection à laquelle on *rajoute* un élément est le nombre qui *suit* le nombre d'éléments de la collection initiale. Le nombre d'éléments d'une collection à laquelle on *enlève* un élément est le nombre qui *précède* le nombre d'éléments de la collection initiale. »			5 min

III. PROLONGEMENTS POSSIBLES ET REMARQUES DIDACTIQUES

1. Prolongements possibles

Il faudra revenir sur cette technique pour connaître le nombre d'éléments d'une collection, dont on connaît le nombre d'éléments et à laquelle on enlève ou ajoute un élément, sans dénombrer la nouvelle collection. Cela pourra se faire :

- à l'occasion d'autres activités avec la pascaline pour prévoir le nombre de cubes sans faire le dernier clic (il s'agira ici de demander aux élèves d'anticiper le résultat de l'action « ajouter 1 » ou « enlever 1 », hypothèse qu'ils pourront vérifier à l'aide de la pascaline),
- à l'occasion d'activités où les élèves auront à leur disposition d'autres outils de dénombrement qui, comme la pascaline, présentent les nombres de façon ordonnée. C'est le cas en particulier de la bande numérique (cf. séance 5 présentée ci-après).

2. Remarques didactiques

La bande numérique et la pascaline prennent en charge plusieurs aspects du nombre : l'aspect cardinal et l'aspect ordinal. Il s'agit d'étudier ces deux aspects pour que les élèves accèdent d'une part au nombre en tant que mémoire (ou nom) d'une quantité commune à toutes les collections en correspondance terme à terme et d'autre part au nombre comme mémoire d'une position.
Le lien entre ces deux aspects doit être mobilisé :

- dans les situations pour la construction du nombre comme mémoire des quantités : les clics de la pascaline ou les cases de la bande numérique sont des collections intermédiaires particulières puisque, si elles sont connues ou manipulées correctement, elles donnent directement la mesure de la quantité à savoir le cardinal de la collection dénombrée
- dans les situations de construction du nombre comme mémoire d'une position : la bande numérique, la suite des nombres, les roues de la pascaline, sont des collections témoins, organisées et disposées de façon immuable avec des objets dans chaque case ou sur chaque dent qui ont des relations beaucoup plus riches qu'une simple relation d'ordre : par exemple si on avance de 3 cases à partir de la case 5 on peut prévoir qu'on sera sur la case 8...

La suite ordonnée des nombres sur la bande numérique ou sur les roues de la pascaline doit devenir la liste des noms des nombres, noms des différentes quantités qui sont dans un ordre tel que quand on passe de l'un d'eux n, au suivant n + 1, il faut adjoindre un élément aux collections à n éléments pour avoir une collection à n + 1 éléments. Tout ceci doit être construit et les activités évoquées précédemment participent à cette construction.

Chapitre VI.
SÉANCE 5 : LE NOMBRE COMME MÉMOIRE D'UNE QUANTITÉ AU CP

Résumé

La séance présentée ci-dessous vise à introduire la pascaline comme un instrument de mesure de la grandeur d'une collection avec le paquet de dix comme nouvelle unité. Le travail fait au cours de cette séance conduit à préciser que dans l'écriture d'un nombre, le chiffre de gauche indique le nombre de paquets de 10 et celui de droite indique le nombre d'éléments tout seuls.

I. PRÉSENTATION DU TRAVAIL CONDUIT AVEC LES ÉLÈVES DE CP

1. Ce que disent les programmes du cycle 2[23]

« - Utiliser diverses stratégies de dénombrement : utilisation d'unités intermédiaires dizaines, centaines…
- Faire le lien entre le rang dans une liste et le nombre d'éléments qui le précède. Relation entre ordinaux et cardinaux.
- Utiliser des outils mathématiques pour résoudre des problèmes concrets, notamment des problèmes portant sur des grandeurs et leurs mesures. »

2. Objectifs de la séance

- Construire l'aspect cardinal du nombre : le nombre mémoire d'une quantité, commun à plusieurs collections.
- Utiliser différents outils pour dénombrer des collections ayant au plus 9 éléments (1re partie), 10 éléments (2e partie), plus de 10 éléments (3e partie).
- Prendre conscience de l'importance du nombre 10 pour représenter les nombres de 11 à 19.
- Apprendre à repérer sur l'écriture chiffrée d'un nombre la quantité de paquets de 10 et d'éléments tout seuls qu'il mesure.

3. Tâche à accomplir

Dénombrer une collection inaccessible (qu'on ne voit pas), dont les éléments ne sont connus que par le bruit que fait chacun d'entre eux en tombant dans une boîte opaque.
À partir de la deuxième partie, il s'agit d'un dénombrement en paquets de 10 et éléments tout seuls. L'apprentissage se centre sur l'accomplissement de cette tâche avec la pascaline.

---

[23] MEN BO spécial N°11 du 26 novembre 2015

4. Les préliminaires à la séance et poursuite prévue

L'outil pascaline a été introduit dès la première semaine de classe, lors des rituels du matin, comme outil de dénombrement des jours de classe écoulés pour chaque mois en cours.
Les deux premières séances ont été consacrées à l'introduction de la pascaline comme outil technique.
Les séances 3 et 4 ont permis une familiarisation avec le maniement de l'objet au travers d'activités de dénombrement, pour des collections d'au moins 9 éléments.
La séance 5, décrite ci-dessous, concerne l'utilisation de la pascaline comme outil de dénombrement de collections au-delà de 10 éléments, en appui sur la dizaine.
Des prolongements à cette séance, allant dans le sens des objectifs poursuivis, sont présentés ci-dessous, paragraphe III.
Les apprentissages conduits seront réinvestis pour accomplir les tâches abordées durant la séance 6.

5. Organisation et matériel

Conduite vers octobre-novembre, cette séance se déroule en trois temps :

- dénombrer des collections de moins de 9 éléments,
- dénombrer des collections d'au moins 10 éléments en partant d'une collection de 9 éléments,
- dénombrer des collections de plus de 10 éléments.

L'organisation de la classe pour chacune des trois parties est identique : un travail par groupe de 4 à 5 élèves avec un outil différent pour chaque groupe.

Groupe 1
une pascaline par élève

Groupe 2
une bande numérique par élève

Groupe 3
une collection de bâtonnets de glace « en vrac » par élève (avec des élastiques pour faire les paquets de 10)

Groupe 4
une ardoise par élève sur laquelle représenter une collection de croix

Des cubes et une boîte métallique pour l'enseignante

II. DESCRIPTION DE LA SÉANCE

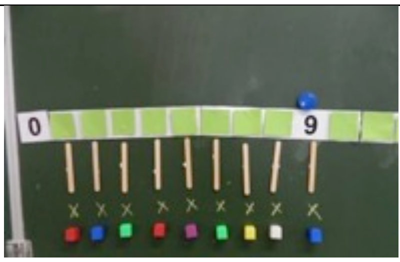
1. Première partie : dénombrement de collections de moins de 9 éléments avec la pascaline

1.1 Déroulement de l'activité

Les durées indiquées sont approximatives et peuvent varier.

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
Mise en place : Le professeur constitue les groupes et distribue à chaque groupe un outil de dénombrement.	Les élèves s'installent et manipulent un temps leur outil respectif avant de se mettre en situation de travailler.	4 min
Mise en situation : Le professeur montre que sa boîte est vide et demande aux élèves de « mimer » cette situation sur leur outil respectif : « Ma boîte est vide. Mimez cet état sur votre outil. » Puis il passe dans les rangs pour s'assurer que chaque outil a été « initialisé » avant de commencer.	Chaque élève exécute la consigne. - sur la pascaline, toutes les roues sont mises à « 0 » - sur la bande numérique, le doigt est sur le « 0 », point de départ du jeu - la boîte de bâtonnets est vide - sur l'ardoise, rien n'est dessiné.	2 min
Il demande à un élève de chaque groupe de verbaliser la situation relative à son outil.	« Toutes les roues de ma pascaline sont à 0. » « Mon doigt est sur le 0. » « Ma boîte de bâtonnets est vide. » « Rien n'est dessiné sur mon ardoise. »	2 min
Consigne : « Je vais mettre des cubes dans une boîte en les faisant tomber les uns après les autres (*jusqu'à 9 : information à ne pas donner aux élèves*). Vous ne me verrez pas faire cette action car je serai derrière vous au fond de la classe. Je ne parlerai pas. Vous allez simplement entendre les bruits produits par les cubes tombant dans la boîte. Vous allez accompagner mes actions c'est-à-dire qu'à chaque fois que je mettrai 1 cube dans la boîte vous entendrez 1 bruit et vous devrez : - sur la pascaline, faire 1 clic sur la roue jaune de droite dans le sens des aiguilles d'une montre à chaque bruit de cube tombant dans la boîte - sur la bande numérique, avancer votre doigt d'1 case à chaque bruit de cube tombant dans la boîte - avec la collection de bâtonnets de glace, mettre 1 bâtonnet dans votre boîte à chaque bruit de cube tombant dans la boîte - avec l'ardoise, dessiner une croix à chaque bruit de cube tombant dans la boîte Quand je m'arrêterai, vous devrez me dire combien il y a de cubes dans ma boîte. »	Un élève de chaque groupe est invité à reformuler la consigne. Ensuite, tous les élèves tournent le dos au professeur qui est au fond de la classe. Ils ne le regardent pas et se concentrent sur les bruits faits par les cubes tombant dans la boîte. À chaque bruit entendu, chaque élève agit sur son outil comme indiqué par le professeur.	2 min

Mise en commun : Quand le professeur a mis 9 cubes dans sa boîte, il passe dans les rangs pour repérer d'éventuelles erreurs de dénombrement puis il interroge un élève par groupe : - avec la bande numérique : « Où se trouve ton doigt sur la bande numérique ? » Lire le nombre désigné par le doigt. - avec la pascaline : « Quel est le nombre affiché sur la pascaline ? » Lire le nombre désigné par les repères triangulaires. - avec la collection de bâtonnets : « Combien y a-t-il de bâtonnets dans ta boîte ? » Dénombrer la collection de bâtonnets et indiquer à l'oral la quantité de bâtonnets présents dans la boîte. - avec l'ardoise : « Combien de croix as-tu dessinées sur ton ardoise ? » Dénombrer la collection de croix dessinées et indiquer à l'oral la quantité de croix dessinées.	Chaque élève interrogé répond au professeur : « Mon doigt est sur le 9. » « Je lis 9 sur la pascaline. » « J'ai 9 bâtonnets dans ma boîte. » « J'ai dessiné 9 croix sur mon ardoise. »	15 min
Il demande ensuite à un autre élève par groupe d'expliquer la technique ayant permis avec son outil de réaliser la tâche demandée, la technique utilisée pour faire « et encore 1 ». Il faut rappeler ici que la description de la technique en fonction de chaque outil a été donnée par le professeur en début de séance. Dans son discours, le professeur a aussi introduit des éléments permettant de justifier la technique.	Chaque élève interrogé répond au professeur : « J'ai fait 1 clic sur la roue jaune de droite de la pascaline dans le sens des aiguilles d'une montre à chaque bruit de cube tombant dans la boîte. » « J'ai avancé mon doigt d'1 case sur la bande numérique à chaque bruit de cube tombant dans la boîte. » « J'ai mis 1 bâtonnet dans ma boîte à chaque bruit de cube tombant dans la boîte. » « J'ai dessiné une croix sur mon ardoise à chaque bruit de cube tombant dans la boîte. »	
Puis il questionne les élèves pour savoir : « À quoi correspond ce nombre ? »	Les élèves répondent : « C'est 9 clics faits sur la roue jaune de droite de la pascaline. » « C'est 9 bâtonnets mis dans la boîte. » « C'est 9 cases parcourues sur la bande numérique. » « C'est 9 croix dessinées sur l'ardoise. » « C'est 9 cubes tombés dans la boîte. C'est le nombre de cubes tombés dans la boîte. »	
Il poursuit son questionnement : « Comment vérifier que 9 c'est bien 9 cubes présents dans sa boîte ? »	Les élèves proposent de dénombrer effectivement la collection de cubes présents dans la boîte du professeur.	
Synthèse de cette première partie : Pourquoi la pascaline donne-t-elle le nombre de cubes présents dans la boîte ? C'est la mise en correspondance terme à terme de la collection de cubes avec les différentes collections intermédiaires créées qui permettra de justifier la pertinence des techniques utilisées pour accomplir la tâche demandée. Le professeur amènera donc les élèves à remarquer que ces collections ont la même quantité d'éléments et que la pascaline donne	 Un élève de chaque groupe viendra au tableau mettre en relation terme à terme la collection intermédiaire qu'il a constituée avec la collection de cubes présents dans la boîte (avec l'aide du professeur pour la mise en place photographiée ci-dessous Figure 33 et Figure 34).	

l’écriture chiffrée du nombre d’éléments de ces collections (9).	 *Figure 33. Les différentes représentations de 9.*  *Figure 34. Affichage de 9 sur la pascaline.*	

1.2 Éclairage pour les enseignants, à propos de la justification de la technique et de la validation

« Pourquoi la pascaline donne-t-elle le nombre de cubes présents dans la boîte ? »

La *description de la* technique est donnée par le professeur. De plus, dans son discours, il introduit des *éléments permettant de justifier la technique* : « chaque fois que je mettrai un cube dans la boîte vous entendrez un bruit et vous ferez un clic sur la roue jaune de droite, vous avancerez d’une case... vous mettrez un bâtonnet... vous dessinerez une croix... ».
Pour vérifier qu’il s’agit du nombre de cubes présents dans la boîte, on va effectivement dénombrer la collection de cubes dans la boîte, de croix dessinées, lire le nombre désigné par le doigt sur la bande numérique et face aux repères triangulaires sur la pascaline. Faire remarquer aux élèves que toutes ces collections ont la même mesure, sont représentées par le même nombre. Cette validation *justifie la pertinence de la technique utilisée* pour accomplir correctement la tâche demandée.

1.3 Éclairage pour les enseignants, à propos de l’institutionnalisation

Il y a la même quantité de clics matérialisés par le nombre inscrit sur la pascaline, de cases, de bâtonnets, de croix que de cubes tombés dans la boîte. La pascaline donne l’écriture chiffrée du nombre d’éléments de ces collections.
On fait des correspondances terme à terme entre la collection de cubes et les collections intermédiaires (de clics, de cases, de croix).

2. Deuxième partie : dénombrement de collections de 10 éléments avec la pascaline

2.1 Déroulement

Ce que fait et dit l’enseignant	**Ce que font et disent les élèves**	**durée**
Situation de chaque outil à la fin de la première partie.	Chaque élève conserve son outil de départ dans l’état où il était en fin de première partie : - la pascaline affiche « 9 » - le doigt est sur le « 9 » de la bande numérique - il y a 9 bâtonnets dans la boîte - 9 croix sont dessinées sur l’ardoise	

Consigne : Il met dans la boîte où il y a déjà 9 cubes, 1 cube supplémentaire : « Je poursuis le jeu. Je continue à mettre des cubes dans ma boîte. Vous allez accompagner mes actions c'est-à-dire qu'à chaque fois que je mettrai 1 cube dans la boîte vous entendrez 1 bruit et vous devrez agir sur votre outil. »	Chaque élève conserve son outil de départ et agit dessus pour faire « et encore 1 ».	2 min
Mise en commun : Quand l'enseignant a mis 10 cubes dans sa boîte, il passe dans les rangs pour repérer d'éventuelles erreurs de dénombrement puis il interroge **d'abord** les groupes qui n'ont pas la pascaline : - avec la bande numérique : « Où se trouve ton doigt sur la bande numérique ? » Lire le nombre désigné par le doigt. - avec la collection de bâtonnets : « Combien y a-t-il de bâtonnets dans ta boîte ? » Dénombrer la collection de bâtonnets et indiquer à l'oral la quantité de bâtonnets présents dans la boîte. - avec l'ardoise : « Combien de croix as-tu dessiné sur ton ardoise ? » Dénombrer la collection de croix dessinées et indiquer à l'oral la quantité de croix dessinées.	Chaque élève interrogé répond à l'enseignant : « Mon doigt est sur le 10. » « J'ai 10 bâtonnets dans ma boîte. » « J'ai dessiné 10 croix sur mon ardoise. »	15 min
Un élève par groupe est interrogé : « Combien de cubes y a-t-il dans la boîte ? » L'enseignant insiste pour que chaque élève verbalise de façon précise ce qu'il a fait, quel est l'état de sa collection et le lien avec la collection de cubes.	Chaque élève interrogé répond à l'enseignant : - sur la bande numérique : « 9 et encore 1 ça fait 10. Je suis sur la case 10. J'ai avancé de 10 cases. Il y a 10 cubes dans la boîte. » - avec les bâtonnets : « 9 et encore 1 ça fait 10. J'ai 10 bâtonnets dans ma boîte. Il y a 10 cubes dans la boîte. » - avec les croix : « 9 et encore 1 ça fait 10. J'ai dessiné 10 croix. Il y a 10 cubes dans la boîte. »	
Puis il questionne les élèves pour savoir : « À quoi correspond ce nombre ? »	Les élèves répondent : « C'est 10 bâtonnets mis dans la boîte. » « C'est 10 cases parcourues sur la bande numérique. » « C'est 10 croix dessinées sur l'ardoise. » « C'est 10 cubes tombés dans la boîte. »	
Il poursuit son questionnement : « Comment vérifier que 10 est bien la mesure de la quantité de cubes présents dans sa boîte ? »	Les élèves proposent de dénombrer effectivement la collection de cubes présents dans la boîte de l'enseignant.	

Ensuite, il demande au groupe ayant la pascaline : « Où lisez-vous 10 ? » Demander à un élève de venir le montrer à toute la classe.	Un élève vient au tableau pour montrer où il lit le nombre 10 (soit sur sa pascaline, soit sur la pascaline papier en format A3 plastifiée affichée au tableau sur laquelle il écrira au feutre effaçable 10, soit sur la e-pascaline projetée si possible).  *Figure 35. Affichage de 10 sur la pascaline.*  *Figure 36. L'affichage de 10 est rendu plus visible par les étiquettes posées sur les dents.*	
Il pose la question suivante au groupe pascaline : « Comment ça s'est passé pour passer de 9 à 10 ? Pour faire 9 et encore 1 ? » On peut supposer qu'ils aient ressenti une force sur la roue jaune de droite quand la roue jaune du milieu s'est mise à tourner dans le sens des aiguilles d'une montre pour afficher 10.	- Des élèves ont dit qu'ils avaient senti « que ça forçait ». - À partir de là, tous les élèves prennent une pascaline, la mettent sur 9 et effectuent le rajout d'une unité pour observer ce qui a été décrit ci-contre.	
Il tente de mettre en relation l'apparition de 1 sur la roue jaune du milieu avec les 10 cubes, les 10 bâtonnets, les 10 croix et les 10 premières cases parcourues sur la bande numérique. L'action décrite ci-contre permettra de bien faire le lien entre le paquet des 10 premières cases ainsi parcourues, le nombre 10 ainsi atteint sur la bande numérique et l'affichage 1 sur la roue jaune du milieu et de 0 sur la roue jaune de droite.	Pour cela, un élève vient successivement pointer du doigt les 10 premières cases sur la bande numérique affichée au tableau, alors que simultanément les autres élèves, avec leur pascaline, tournent la roue jaune de droite d'un clic dans le sens des aiguilles d'une montre. L'élève entoure les 10 cases ainsi parcourues.	
Synthèse de cette deuxième partie : Pourquoi la pascaline donne-t-elle le nombre de cubes présents dans la boîte ? C'est la mise en correspondance terme à terme de la collection de cubes avec les différentes collections intermédiaires créées qui permettra de justifier la pertinence des techniques utilisées pour accomplir la tâche demandée. L'enseignant amènera donc les élèves à remarquer que ces collections ont la même quantité d'éléments et que la pascaline donne l'écriture chiffrée du nombre d'éléments de ces collections (10).	Un élève de chaque groupe viendra au tableau mettre en relation terme à terme la collection intermédiaire qu'il a constituée avec la collection de cubes présents dans la boîte (avec l'aide de l'enseignant pour la mise en place photographiée ci-dessous).	

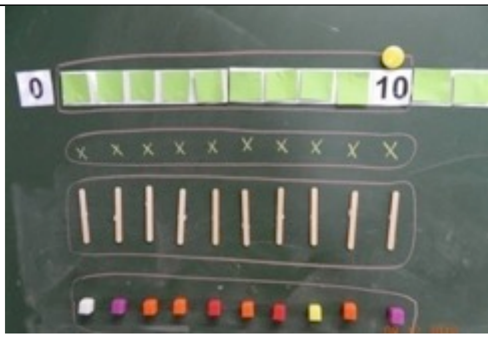
<table>
<tr>
<td>Leur préciser, s'ils ne l'ont pas remarqué, que la roue jaune du milieu indique le nombre de paquets de 10 : ici, 1 paquet de 10.</td>
<td>

Figure 37. Les différentes représentations de 10.


Figure 38. Représentation de 10 sur la pascaline, associée à celles de la Figure 37.

Chaque élève sera amené à matérialiser ce paquet de 10 avec son matériel.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

2.2 Éclairage pour les enseignants, à propos de la justification de la technique et de la validation

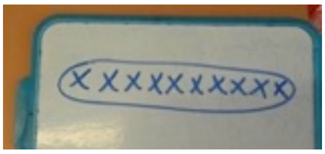
« Pourquoi la pascaline donne-t-elle le nombre de cubes présents dans la boîte ? »
La description de la technique est donnée par l'enseignant. De plus, dans son discours, il introduit des éléments permettant de justifier la technique : « chaque fois que je mettrai un cube dans la boîte vous entendrez un bruit et vous ferez un clic sur la roue jaune de droite, vous avancerez d'une case..., vous mettrez un bâtonnet..., vous dessinerez une croix... »
Il y a la même quantité de clics matérialisés par le nombre inscrit sur la pascaline, de cases, de bâtonnets, de croix que de cubes tombés dans la boîte. La pascaline donne l'écriture chiffrée du nombre d'éléments de ces collections.
On fait des correspondances terme à terme entre la collection de cubes et les collections intermédiaires (de clics, de cases, de croix).
Pour vérifier qu'il s'agit du nombre de cubes présents dans la boîte, on va effectivement dénombrer la collection de cubes dans la boîte, de croix faites, de bâtonnets, lire le nombre désigné par le doigt sur la bande numérique. Cette validation *justifie la pertinence de la technique utilisée* pour accomplir correctement la tâche demandée.

2.3 Éclairage pour les enseignants, à propos de l'institutionnalisation

Dans la mise en œuvre de la technique de dénombrement, la pascaline est le seul outil faisant apparaître une rupture lors du rajout d'une unité entre 9 et 10. La pascaline sait compter en paquets de 10 et éléments tout seuls mais elle ne fait pas matériellement de paquets de 10. C'est donc l'usage des autres techniques de dénombrement qui permet de reconnaître dans le couple de chiffres affiché sur la pascaline, l'écriture chiffrée du nombre d'éléments et le nom de ce nombre.
Pour cela, l'enseignant introduit une nouvelle technique pour matérialiser les paquets de 10 :

a) entourer dix bâtonnets avec un élastique

b) ou entourer dix croix avec un trait



c) ou emboîter 10 cubes ensemble

d) ou repérer et entourer les dix premières cases de la bande numérique

e) pas de technique spéciale avec la pascaline mais un effet particulier : un son plus fort et un retour de force plus important

Cette nouvelle technique, qui consiste à réaliser des groupements par 10 dans une collection, n'est pas nécessaire pour résoudre le problème posé puisque la collection à dénombrer est ici petite. Cependant elle est justifiée par sa cohérence avec le fonctionnement de la pascaline qui, de par sa nature, donne l'écriture chiffrée du nombre d'éléments d'une collection « en vrac » en paquets de 10 et en « tout seuls ». On pourra ainsi compter en dizaines et en unités. La grandeur quantité sera mesurée par un nombre entier indiquant le nombre de dizaines et le nombre d'unités.
Faire correspondre à la grandeur quantité sa mesure revient à modéliser le monde sensible dans la théorie des nombres. Cette modélisation est explicitée par le schéma ci-dessous.

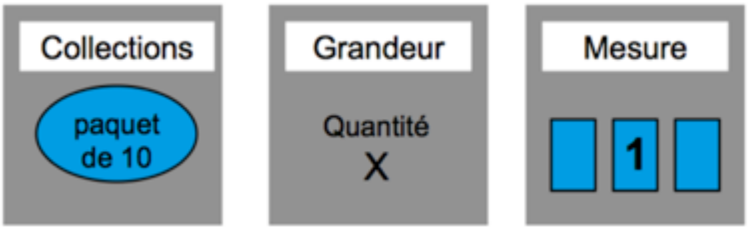


Figure 39. Correspondance entre les collections de 10 éléments, la grandeur quantité X et la mesure pour le nombre 10[24].

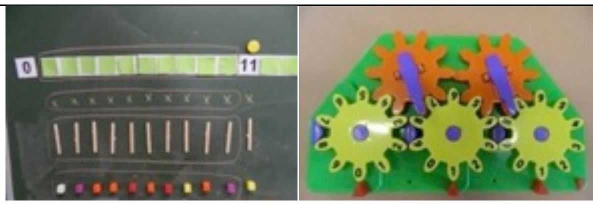
L'enseignant précise que, dans l'écriture d'un nombre, le chiffre de gauche (celui qui est sous la roue du milieu dans le dénombrement) indique le nombre de paquets de 10 et le chiffre de droite (celui qui est sous la roue de droite dans le dénombrement) indique le nombre d'éléments tout seuls.

3. Troisième partie : dénombrement de collections de plus de 10 éléments avec la pascaline

[24] SOURY-LAVERGNE S., NOYGUES I. (2017). La pascaline comme entrée dans une formation sur l'enseignement de la numération et du calcul au CP. *43*[e] *colloque de la COPIRELEM Enseignement des mathématiques et formation des maîtres aujourd'hui : quelles orientations, quels enjeux ?* Le Puy-en-Velay, France 2016.

3.1 Déroulement

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	durée
Situation de chaque outil à la fin de la deuxième partie avant d'explorer d'autres tâches analogues (lors d'une autre séance, on pourra recommencer avec des ajouts supérieurs à 1 unité).	Chaque élève conserve son outil de départ dans l'état où il était en fin de deuxième partie : - la pascaline affiche « 10 » - le doigt est sur le « 10 » de la bande numérique - il y a 10 bâtonnets dans la boîte - 10 croix sont dessinées sur l'ardoise	
Consigne : L'enseignant met dans la boîte où il y a déjà 10 cubes, 1 cube supplémentaire : « Je poursuis le jeu. Je continue à mettre des cubes dans ma boîte. Vous allez accompagner mes actions c'est-à-dire qu'à chaque fois que je mettrai 1 cube dans la boîte vous entendrez 1 bruit et vous devrez agir sur votre outil. »	Chaque élève conserve son outil de départ et agit dessus pour faire « et encore 1 ».	2 min
Mise en commun : Quand l'enseignant a mis 11 cubes dans sa boîte, il passe dans les rangs pour repérer d'éventuelles erreurs de dénombrement puis il interroge d'abord les groupes qui n'ont pas la pascaline : « Combien de cubes y a-t-il dans la boîte ? » « À quoi correspond ce nombre ? » L'enseignant demande d'expliciter la technique mise en place.	Chaque élève interrogé répond à l'enseignant: - sur la bande numérique : « 10 et encore 1 ça fait 11. Je suis sur la case 11. J'ai avancé de 11 cases. Il y a 11 cubes dans la boîte. » - avec les bâtonnets : « 10 et encore 1 ça fait 11. J'ai 11 bâtonnets dans ma boîte. Il y a 11 cubes dans la boîte. » - avec les croix : « 10 et encore 1 ça fait 11. J'ai dessiné 11 croix. Il y a 11 cubes dans la boîte. »	15 min
Ensuite, il demande au groupe ayant la pascaline : Où lisez-vous 11 ? Demander à un élève de venir le montrer à toute la classe.	Un élève vient au tableau pour montrer où il lit le nombre 11 (soit sur sa pascaline, soit sur la pascaline papier en format A3 plastifiée affichée au tableau sur laquelle il écrira au feutre effaçable 11, soit sur la e-pascaline projetée si possible).	
Il pose la question suivante au groupe pascaline : « Que s'est-il passé quand vous avez fait l'ajout *et encore 1* ?»	Des élèves ont dit que la roue jaune du milieu n'a pas tourné. Seule la roue jaune de droite a tourné d'un clic de plus dans le sens des aiguilles d'une montre.	
Il pose la question suivante : « Que représente ce nombre ? »	Les élèves indiquent que le 1 sous la roue jaune du milieu indique 1 paquet de 10 (bâtonnets, croix, cases, clics ou cubes) et le 1 sous la roue jaune de droite indique 1 tout seul (1 bâtonnet, 1 croix, 1 case, 1 clic ou 1 cube).	
Synthèse de cette troisième partie : Pourquoi la pascaline donne-t-elle le nombre de cubes présents dans la boîte ? C'est la mise en correspondance terme à terme de la collection de cubes avec les différentes collections intermédiaires créées qui permettra de justifier la pertinence des techniques utilisées pour accomplir la tâche demandée.	Un élève de chaque groupe viendra au tableau mettre en relation terme à terme la collection intermédiaire qu'il a constituée avec la collection de cubes présents dans la boîte (avec l'aide de l'enseignant pour la mise en place photographiée ci-dessous).	

L’enseignant amènera donc les élèves à remarquer que ces collections ont la même quantité d’éléments et que la pascaline donne l’écriture chiffrée du nombre d’éléments de ces collections (11).	 *Figure 40. Différentes représentations du nombre 11.*	

3.2 Éclairage pour les enseignants, à propos de la justification de la technique et de la validation

« Pourquoi la pascaline donne-t-elle le nombre de cubes présents dans la boîte ? »
La *description de la* technique est donnée par l'enseignant. De plus, dans son discours, il introduit des *éléments permettant de justifier la technique* : « chaque fois que je mettrai un cube dans la boîte vous entendrez un bruit et vous ferez un clic sur la roue jaune de droite, vous avancerez d'une case..., vous mettrez un bâtonnet..., vous dessinerez une croix... »
L'enseignant incite les élèves à vérifier que le nombre « 11 » représente bien 1 paquet de 10 cubes et 1 cube isolé.

- Vérification avec le groupe des bâtonnets : on peut faire un paquet de 10 bâtonnets avec l'élastique et encore 1 bâtonnet tout seul en plus du paquet de 10 bâtonnets. On a en tout 11 bâtonnets. Le dénombrement des bâtonnets permet de trouver le nom de ce nombre.
- Vérification avec le groupe des croix : on peut faire 1 paquet de 10 croix (entourer 10 croix) et encore 1 croix toute seule en plus du paquet de 10 croix. On a en tout 11 croix. Le dénombrement des croix permet de trouver le nom de ce nombre.
- Vérification avec le groupe de la bande numérique : on est sur la case « 10 » et encore 1 case on arrive sur la case « 11 ». Cette dernière permettra de trouver le nom de ce nombre.
- Vérification avec les cubes : on est sur la case « 10 » et encore 1 case on arrive sur la case « 11 ». Cette dernière permettra de trouver le nom de ce nombre.

On fait des correspondances terme à terme entre la collection de cubes et les collections intermédiaires (de clics, de cases, de croix).
Il y a bien la même quantité de clics matérialisés par le nombre inscrit sur la pascaline, de cases, de bâtonnets, de croix que de cubes tombés dans la boîte. La pascaline donne l'écriture chiffrée du nombre d'éléments de ces collections.

D'autres ajouts seront réalisés par l'enseignant. Cette séance sera reprise plusieurs fois pour arriver à 19 cubes dans la boîte.

3.3 Éclairage pour les enseignants, à propos de l'institutionnalisation

La pascaline donne l'écriture chiffrée de la quantité d'éléments de ces collections en nombre de paquets de 10 et nombre d'éléments tout seuls.
Le chiffre de gauche sous la roue jaune du milieu indique le nombre de paquets de 10 c'est-à-dire le nombre de dizaines.
Le chiffre de droite sous la roue jaune de droite indique le nombre d'éléments tout seuls c'est-à-dire le nombre d'unités.
Cette séance est un premier pas vers l'étude de la valeur positionnelle des chiffres dans l'écriture des nombres. Sur la pascaline, on a une roue pour chaque chiffre de l'écriture d'un nombre. Sur la pascaline, chaque roue (unités, dizaines et centaines) respecte la position des chiffres des unités, des dizaines et des centaines dans l'écriture chiffrée des nombres. Ceci n'est pas matérialisé sur la bande numérique.

III. PROLONGEMENTS POSSIBLES ET REMARQUES DIDACTIQUES

1. Prolongements possibles

On pourrait compléter cette séance par une séance où serait travaillé le type de tâche voisin : partant d'un nombre mesurant la quantité d'éléments d'une collection, savoir combien cette collection contient de paquets de 10 et combien d'éléments tout seuls restent. Par exemple, j'ai 16 jetons que je veux ranger sur des cartes à 10 cases, combien je remplis de cartes et combien me reste-t-il de jetons ? Le travail fait au cours de la séance décrite ci-dessus servirait alors d'appui technologique pour justifier la technique à élaborer : dans 16, le chiffre de gauche indique le nombre de paquets de 10, celui de droite le nombre d'éléments tout seuls.

Il est intéressant de reproduire cette séance plusieurs fois tout au long de l'année scolaire pour exprimer les nombres jusqu'à 99 en fonction de 10.

2. Deux remarques didactiques

Première remarque
Les tâches entraînées ici, dans l'organisation didactique mise en place, vont bien au-delà de l'usage de la pascaline pour dénombrer des collections de plus de 9 éléments. On introduit un instrument de mesure de la grandeur d'une collection avec une nouvelle unité : le paquet de dix. La pascaline, par sa conception même, dénombre les collections *en paquets de 10 et éléments tout seuls,* ceci sans organiser la collection en paquets de 10. L'usage des autres techniques de dénombrement permet de reconnaître dans le couple de chiffres affiché l'écriture chiffrée du nombre d'éléments et le nom de ce nombre. Il est certainement important de saisir cette occasion par une institutionnalisation claire. On part d'une collection en vrac, c'est-à-dire non organisée en paquets de 10, la pascaline donne l'écriture chiffrée du nombre d'éléments de cette collection en nombre de paquets de 10 et nombre d'éléments tout seuls.

Deuxième remarque
Le travail fait au cours de cette séance conduit à préciser que dans l'écriture d'un nombre le chiffre de gauche (celui qui est sous la roue jaune du milieu dans le dénombrement) indique le nombre de paquets de 10 et le chiffre de droite (celui qui est sous la roue jaune de droite dans le dénombrement) indique le nombre d'éléments tout seuls.

Chapitre VII.
SÉANCE 6 : VALEUR POSITIONNELLE D'UN CHIFFRE DANS L'ÉCRITURE D'UN NOMBRE

Résumé

Dans la séance décrite ci-dessous, les élèves reçoivent un robot appelé ziglotron[25] auquel il manque des boutons. Des boutons sont disponibles chez un marchand, vendus à l'unité ou groupés par dix. Les élèves doivent demander « juste ce qu'il faut de boutons » pour réparer celui qui leur a été remis.
Cette séance vise non seulement à utiliser les groupements par dix pour réaliser une quantité mais aussi à utiliser la valeur positionnelle des chiffres dans l'écriture d'un nombre.

I. PRÉSENTATION DU TRAVAIL CONDUIT AVEC LES ÉLÈVES DE CP

1. Ce que disent les programmes du cycle 2[26]

« La connaissance des nombres entiers et du calcul est un objectif majeur du cycle 2. Elle se développe en appui sur les quantités et les grandeurs, en travaillant selon plusieurs axes […]
L'étude de relations internes aux nombres : [...] décomposer/recomposer les nombres additivement, multiplicativement, en utilisant les unités de numération (dizaines, centaines, milliers), changer d'unités de numération de référence [...]
L'étude des différentes désignations orales et/ou écrites : nom du nombre ; écriture usuelle en chiffres (numération décimale de position) [...] »

Parmi les « Attendus en fin de cycle » :

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer, ordonner, repérer, comparer	
Dénombrer, constituer et comparer des collections. Utiliser diverses stratégies de dénombrement. - Procédures de dénombrement ([...] utilisations d'unités intermédiaires : dizaines, centaines, en relation ou non avec des groupements).	Dénombrer des collections en les organisant et désigner leur nombre d'éléments ([...] écritures en unités de numération, écriture usuelle). Une importance particulière est accordée aux regroupements par dizaines, centaines, milliers.

[25] Matériel utilisé dans le manuel CAP Maths des éditions Hatier (2016) : il s'agit de la représentation d'un robot sur lequel de petits ronds en couleur ou blancs représentent des boutons en bon état ou devant être changés (cf. Figure 41).
[26] MEN B.O. spécial N°11 du 26 novembre 2015

Nommer, lire, écrire, représenter des nombres entiers	
[...] Interpréter les noms des nombres à l'aide des unités de numération et des écritures arithmétiques. - Unités de numération (unités simples, dizaines, centaines, milliers) et leurs relations (principe décimal de la numération en chiffres). - Valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture d'un nombre (principe de position). - Noms des nombres.	[...] Utiliser des écritures en unités de numération (5d 6u, mais aussi 4d 16u ou 6u 5d pour 56). Itérer une suite de 1 en 1, de 10 en 10, de 100 en 100.

2. Objectifs de la séance

- Utiliser les groupements par dix pour réaliser une quantité.
- Consolider l'utilisation de la valeur positionnelle des chiffres dans l'écriture d'un nombre.

3. Tâche à accomplir et techniques attendues

Type de tâche
Dénombrer une collection et écrire le cardinal de cette collection sur la pascaline.

Tâche
Déterminer le nombre de boutons manquants sur le ziglotron (cf. Figure 41, voir Annexe V page 123 pour la fiche à imprimer). Puis, aller demander au marchand juste ce qu'il faut de boutons pour réparer son ziglotron, ni plus, ni moins. Le marchand dispose de plaques de 10 boutons et des boutons isolés. C'est à chacun de demander exactement ce qu'il veut : des plaques et/ou des jetons isolés.

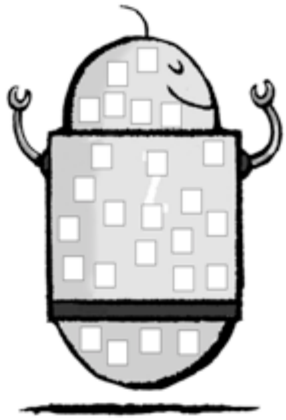


Figure 41. Le ziglotron, image d'un robot auquel il manque des boutons. Extrait du manuel CAP Maths CP, Hatier.

Techniques attendues
En ce qui concerne l'information prise sur le ziglotron :
- Les élèves ne prennent pas d'information et vont directement demander un nombre quelconque de boutons.
- Les élèves comptent les boutons manquants un par un.
- Les élèves groupent les boutons par dix, puis comptent les paquets et les boutons isolés.

En ce qui concerne la commande faite au marchand :
- Les élèves commandent un certain nombre de boutons isolés.
- Les élèves commandent un nombre de plaques et un nombre de boutons isolés.

4. Préliminaires à la séance et poursuite prévue

L'outil pascaline a été introduit dès la première semaine de classe, lors des rituels du matin, comme outil de dénombrement des jours de classe écoulés pour chaque mois en cours.
Les deux premières séances ont été consacrées à l'introduction de la pascaline comme objet technique.

Les séances 3 et 4 ont permis une familiarisation avec le maniement de l'objet au travers d'activités de dénombrement.
La séance 5 concerne l'utilisation de la pascaline comme outil de dénombrement de collections au-delà de 10 éléments, en appui sur la dizaine, en utilisant les apprentissages de la séance 4.
D'autres séances seront nécessaires pour s'entraîner à donner le cardinal d'une collection à partir d'un dénombrement par paquets de 10 et éléments tout seuls, et inversement à lire sur l'écriture chiffrée du cardinal d'une collection combien de paquets de 10 et d'éléments tout seuls la constituent.

5. Organisation et matériel

Alternance de travail en binômes et de phases collectives.
Une pascaline et une photo du ziglotron pour chaque binôme (voir Annexe V page 123 pour la fiche à imprimer).
Des jetons mobiles (plus économiques que les pastilles autocollantes car réutilisables) représentant des boutons, en plaques de 10 et en éléments isolés.

II. DESCRIPTION DE LA SÉANCE

1. Mise en situation

1.1 Initialisation de l'activité

Les durées indiquées sont approximatives et peuvent varier.

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
Mise en place : L'enseignant constitue des groupes de deux. Il distribue à chaque groupe une pascaline et une photo du ziglotron sur lequel il manque des boutons.	Les élèves s'installent et manipulent un temps leur outil avant de se mettre en situation de travailler : sur la pascaline, toutes les roues sont mises à « 0 ».	5 min
La consigne : « Gribouille a retiré des boutons des ziglotrons. Ils sont en panne. Pour les réparer, il faut aller chercher auprès du marchand le nombre exact de boutons manquants : ni plus, ni moins. Le marchand peut donner des plaques de 10 boutons et/ou des boutons isolés. »	Les élèves observent leur ziglotron. Ils se répartissent les tâches : un utilise la pascaline, l'autre travaille sur le ziglotron.	2 min

1.2 Ce que les élèves font avant d'aller chez le marchand

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
L'enseignant observe trois techniques de dénombrement utilisées par les élèves.	*Deux groupes* ont numéroté les cases vides du ziglotron jusqu'au cardinal de la collection (de 1 à 23). Dans ces groupes, l'élève qui numérote annonce à voix haute chaque nombre qu'il écrit au fur et à mesure de l'énumération (le dernier de ces nombres représente le cardinal de la collection.) Son « collègue » n'a ainsi pas besoin de le regarder cocher sur la fiche. Il fixe son regard sur la pascaline : à chaque nombre énoncé correspond un clic. La technique consistant à numéroter chaque case vide permet de garder en mémoire le cardinal de la collection.	10 min

	Vu le travail fait en amont (séances n°3/4/5), ils n'auront plus qu'à regarder ce qui est affiché sur la roue jaune du milieu pour connaître le nombre de paquets de 10 à commander et à regarder ce qui est affiché sur la roue jaune de droite pour connaître le nombre de jetons tout seul à commander. *Trois groupes* cochent les cases vides du ziglotron au fur et à mesure qu'ils les dénombrent c'est-à-dire au fur et à mesure qu'ils énoncent les nombres de la file numérique. On a pu repérer 3 façons de cocher : 1 trait dans la case ; 1 croix dans la case ; case coloriée. Dans l'un de ces groupes, l'élève qui coche ne dit rien : il n'annonce pas les cases vides à voix haute. Aussi, son « collègue » doit le regarder cocher sur la fiche. Il ne regarde donc pas la pascaline : à chaque case cochée correspond un clic. Dans les 2 autres groupes, celui qui coche annonce la suite des nombres à voix haute. Donc celui qui a la pascaline concentre son regard sur l'outil : à chaque nombre énoncé correspond un clic. Le clic sur la pascaline vient toujours après le repérage de la case et jamais l'inverse (je clique puis je coche). Dans les *3 derniers groupes*, celui qui est chargé de dénombrer les cases vides les pointe avec son doigt soit à voix haute, soit en silence. Celui qui a la pascaline actionne la roue de droite : à 1 case pointée en silence correspond 1 clic/ à chaque nombre énoncé correspond 1 clic. Cette technique peut être source d'erreurs dans le pointage de chaque élément de la collection (risque de dénombrer 2 fois une même case ou d'en oublier) : cette technique d'énumération n'est donc pas fiable.	

1.3 Ce que les élèves demandent au marchand

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
L'enseignant observe trois techniques utilisées par les élèves pour formuler la demande. L'enseignant a supposé qu'il y avait eu imitation. En effet, 1 élève par groupe devait venir passer commande auprès du marchand. Les élèves de ces 3 groupes sont arrivés tous en même temps et ont vu ce que demandaient les autres. Seul l'un des 3 s'est aperçu de l'erreur de retour à sa place. L'enseignant a compris qu'il s'agissait là d'une stratégie de d'économie du travail manuel pour ne pas avoir à découper les plaques. Pour 2 de ces groupes, des erreurs ont été commises par l'« adulte marchand » au moment de la commande (erreur de dénombrement) : 1 groupe en avait 1 de trop ; 1 autre en avait 1 de moins.	*Trois groupes* ont demandé 23 plaques ! *Quatre groupes* ont demandé 23 boutons isolés. *Un groupe* a demandé 2 plaques de 10 et 3 boutons isolés.	10 min

1.4 Ce que font les élèves de retour à leur place

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	Durée
L'enseignant passe auprès de chaque binôme pour repérer les groupes qui n'ont pas réussi et qui seront amenés lors de la mise en commun à expliciter leur stratégie.	De retour à leur place les élèves doivent placer les boutons donnés par le marchand sur leur ziglotron. Ils peuvent ainsi s'apercevoir d'eux-mêmes si oui ou non ils ont réussi à accomplir la tâche proposée.	10 min

L'exercice est réussi si tous les boutons manquants sur le ziglotron sont remplacés. Il ne faut pas qu'il y en ait plus ou moins.

2. Mise en commun collective (10 min)

Chaque groupe passe au tableau pour expliquer aux autres comment il a procédé pour déterminer la quantité de boutons à aller demander au marchand. L'enseignant a commencé par interroger les groupes qui ne sont pas parvenu à accomplir correctement la tâche proposée.
Les techniques ne cochant pas les cases dénombrées au fur et à mesure, « à chaque bouton coché correspond 1 clic sur la pascaline », sont pointées comme non fiables. Il convient de préciser que l'action de « cocher » s'est faite ici soit par un nombre, soit par une croix, soit par un trait, soit en coloriant.
Les élèves ont remarqué qu'en demandant au marchand seulement des boutons isolés, ce dernier risquait de se tromper pour dénombrer. De plus, ils ont remarqué qu'il fallait plus de temps pour servir chaque groupe. Ils en ont conclu que la procédure la plus fiable consistait à demander 2 plaques de 10 et 3 boutons isolés.

3. Synthèse collective (10 min)

- Insister sur l'importance de dénombrer avec précision les boutons nécessaires pour réparer le ziglotron afin qu'il y ait autant de clics que de boutons manquants. Une technique fiable consiste à cocher au fur et à mesure les cases dénombrées *: à chaque bouton coché correspond 1 clic sur la pascaline.*
- Faire remarquer que la pascaline permet de garder en mémoire le cardinal de la collection *« boutons manquants »* qui sera ainsi écrit sur la pascaline à la fin du dénombrement.
- Rappeler que 23 c'est 2 plaques de 10 et 3 boutons isolés : l'enseignant l'a dessiné au tableau les plaques et les boutons.
- Faire remarquer que pour le groupe qui a demandé des plaques de 10 et des boutons isolés, il n'y a pas eu d'erreurs de la part du marchand.

III. POURSUITE DU TRAVAIL

Lors de la séance suivante, deux contraintes supplémentaires seront données aux élèves : « Le marchand ne peut pas donner plus de 9 boutons isolés. Il est interdit de parler au marchand. »
Il s'agit ici d'inciter les élèves à dessiner sur leur ardoise le nombre de plaques de 10 et des boutons isolés nécessaires pour réparer le ziglotron et donc à travailler sur **l'aspect positionnel**[27] de notre numération.
Dans un 1er temps, les élèves n'auront pas accès à la pascaline comme outil de mémoire du cardinal de la collection, l'idée étant de les conduire à faire des paquets de 10 sur leur fiche. Ainsi, s'ils ne se souviennent plus du cardinal de leur collection, ils pourront plus rapidement compter à nouveau de 10 en 10.

---

[27] L'aspect positionnel et l'aspect décimal de la numération sont présentés dans les travaux de F. Tempier avec une ressource en ligne à destination des enseignants : http://numerationdecimale.free.fr/. Voir également la façon dont leur apprentissage est pris en charge dans les manuels : TEMPIER, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N*, *86*, 59–90.

On prépare ainsi l'introduction de **l'aspect décimal** de notre numération : on attire l'attention sur le fait que le chiffre de gauche indique le nombre de paquets de 10 et celui de droite indique le nombre de boutons isolés. Sur la pascaline, la roue jaune du milieu indique le nombre de paquets de 10 et celle de droite indique le nombre de boutons isolés.
Lors de la mise en commun, chaque élève aura la pascaline afin de vérifier si le cardinal est correct : en additionnant les plaques de 10 et les boutons isolés.

Partie 2.
La pascaline au cycle 3

Séverine FLEURY
Professeur de mathématiques
Collège de la Comté, Vic Le Comte
Thierry LAMBRE
Professeur des Universités
I.R.E.M. de Clermont-Ferrand
Josette METAIS
Professeur des écoles
École primaire publique Vercingétorix, Aubière

Chapitre VIII.
PASCALINE ET SOUSTRACTION AU CYCLE 3

Résumé

Au cycle 3, la pascaline a été utilisée comme moyen d'éviter des révisions fastidieuses, les opérations étant effectuées en utilisant la pascaline, et pour aider certains élèves en difficulté.

I. PROGRAMMES ET CONSTATS

Dans les ressources d'accompagnement des programmes de mathématiques[28] (Calcul aux cycles 2 et 3), on trouve :

« ***Au cycle 3*** *[…] En calcul posé, les algorithmes des quatre opérations sont travaillés avec des nombres entiers et décimaux.*

[…] Les fonctions de base de la calculatrice (utilisation des quatre opérations) sont introduites pour obtenir ou vérifier un résultat.

[…] L'entrainement au calcul posé est prévu dans la durée, de façon filée plutôt que massée.

Pour faire progresser les élèves en calcul posé, il est important de développer chez chacun d'eux, une attitude réflexive face à l'origine de ses erreurs. Des activités d'analyse de productions erronées ou non abouties sont pour cela efficaces (l'utilisation d'un visualiseur est adaptée).

Le choix des algorithmes de calcul posé travaillés tout au long de la scolarité d'un élève doit être cohérent, par exemple :

Où positionne-t-on les retenues pour les additions et les multiplications ?

Quel algorithme choisit-on pour la soustraction ? (« par cassage », « par compléments », « par ajouts simultanés », etc.) »

Les évaluations nationales CEDRE en mathématiques, en fin d'école primaire, montrent que parmi les élèves de CM2 des écoles publiques et privées sous contrat de France métropolitaine :

- 3,7 % des élèves savent faire seulement les additions sans retenue ;
- 12 % des élèves savent calculer seulement les soustractions sans l'utilisation des retenues[29].

Elles montrent *également* que 42 % des élèves ont une maîtrise fragile des mathématiques, voire de grandes difficultés à l'issue de l'école primaire. Ce score est confirmé par l'enquête TIMSS 2015 (contre 25 % en moyenne dans les pays ayant participé à l'enquête).

En France, 21 % des élèves de fin de CM1 atteignent un niveau élevé selon TIMSS 2015, alors qu'ils sont 36 % en moyenne dans les pays de l'OCDE.

En CE2, la place accordée au domaine « Nombres et calcul » peut varier de 37 % du contenu total à 67 % selon le manuel scolaire choisi[30].

---

[28] eduscol.education.fr/ressources-2016 - Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche - Mars 2016, p. 3-4.

[29] DEPP Note d'information n° 18, mai 2015 http://cache.media.education.gouv.fr/file/2015/25/2/depp-ni-2015-18-cedre-2014-mathematiques-ecole_422252.pdf

[30] CNESCO "Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire" (novembre 2015) http://www.cnesco.fr/fr/numeration/

II. OBJECTIFS

L'objectif principal est de revoir le sens de la retenue dans la soustraction en proposant une situation stimulante avec la pascaline sous forme de défis lancés à la classe et afin d'éviter les révisions rébarbatives.
La pascaline n'est plus considérée comme un compteur comme au cycle 2 mais comme un calculateur.
Les objectifs de la séance 0 sont de découvrir la pascaline et de fixer le vocabulaire pour décrire la machine et son fonctionnement.
Pour la séance 1, un objectif se rajoute aux deux premiers : utiliser la machine proposée pour faire des soustractions.
Les objectifs de la séance 2 sont d'utiliser la machine proposée pour faire des soustractions, de travailler le raisonnement mathématique en anticipant le passage automatique et en inventant une soustraction quand le passage automatique est donné par l'enseignant.

Au cours des séances, les élèves doivent :
- mobiliser leurs connaissances sur la soustraction pour répondre au problème posé,
- se remémorer la technique opératoire et l'exposer sans l'intervention de l'enseignant.

Ils travaillent les compétences suivantes :
« *Calculer*
- *contrôler la vraisemblance de ses résultats.*
- *utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier un résultat ».*

[…] Communiquer
- *utiliser progressivement un vocabulaire adéquat et/ou des notations adaptées pour décrire une situation, exposer une argumentation.*
- *expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange. »*

III. TÂCHES

Cette séquence comprend trois séances, la séance 0 pour découvrir la manipulation de la pascaline, la séance 1 pour faire des soustractions et la séance 2 pour comprendre le sens de la retenue. Cette dernière est longue et peut être conduite sur 2 ou 3 jours. Toutes les séances utilisent la pascaline.
Chaque enseignant peut choisir de poursuivre la séquence comme il le souhaite (technique opératoire de l'addition, résolution de problèmes, calcul mental…).
Les durées indiquées sont approximatives et dépendront du niveau des élèves.

Selon leur place dans la séquence, les manipulations de la pascaline n'ont pas les mêmes objectifs.
Au début de la séquence, elles visent à mettre en relation le fonctionnement de la machine et les techniques opératoires.
Plus tard, elles sont interdites pour forcer les élèves à anticiper les résultats et ne sont autorisées que pour valider leurs réponses.

Il est important que les recherches des élèves figurent sur un même support papier qui traduit la chronologie des situations proposées. L'enseignant peut organiser ses traces écrites : insertion ou non des bilans collectifs élaborés au cours des recherches.

Voici un tableau décrivant la structure globale de la séquence :

Scénarios	Durée
Séance 0 : découverte de la pascaline	
Observation de la pascaline Découverte de la pascaline comme outil pour l'affichage Ajouter Retrancher	15 min 26 min 15 min 18 min
Séance 1 : faire des soustractions avec la pascaline	
Observation de la pascaline Soustraction sans retenue et manipulation de la pascaline guidée Soustraction sans retenue et manipulations de la pascaline non guidée Soustraction avec retenue et manipulation de la pascaline non guidée Institutionnalisation	15 min 30 min 30 min 15 min 10 min
Séance 2 : comprendre le sens de la retenue avec la pascaline	
Réinvestissement de la séance 1 avec une ou plusieurs soustractions avec retenue Anticipation du passage automatique quand l'enseignant donne l'opération Trouver l'opération quand l'enseignant donne le passage automatique	10 min 20 min 25 min

1. Préliminaires

Les séances proposées peuvent se conduire au moment de la révision de l'addition et de la soustraction avec retenue.
Pour les élèves de CM qui n'ont jamais manipulé la pascaline, une séance 0 peut être mise en place pour se l'approprier.
En classe de sixième, le travail sur les opérations peut commencer directement par les séances 1 et 2 qui proposent des situations soustractives pour motiver les élèves avec des calculs moins simples que des calculs additifs.

2. Organisation et matériel

Dans le cadre de chacune de ces séances, les élèves travaillent en binômes ou individuellement, avec ou sans manipulation de pascaline et le bilan est réalisé collectivement.

Matériel
- une pascaline par binôme,
- une pascaline pour l'enseignant,
- deux ou trois pascalines de secours,
- éventuellement un vidéoprojecteur pour projeter la e-pascaline[31] et proposer une correction collective,
- une feuille de recherche ou le cahier/classeur de mathématiques pour les recherches.

[31] La e-pascaline diffusée par l'IFE est téléchargeable à cette adresse : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/cabri-elem-ife/

Chapitre IX.
DESCRIPTION PAS À PAS DE TROIS SÉANCES AU CYCLE 3

Résumé

Les trois séances présentées ci-dessous sont centrées sur la technique de la soustraction posée avec retenues. Elles s'adressent à la classe entière, mais visent plus particulièrement les élèves qui, en cycle 3, ont encore des difficultés pour accomplir ce type de tâche, difficultés en général liées à une connaissance défaillante du fonctionnement de notre système décimal de position.
Pour éviter des révisions fastidieuses, les opérations sont effectuées en utilisant la pascaline.

I. PARTIE 1, SÉANCE 0, DÉCOUVERTE DE LA PASCALINE AU CYCLE 3

Il s'agit d'une séance de découverte de la pascaline pour des élèves qui auraient besoin d'apprendre à manipuler l'objet pascaline pour en comprendre le fonctionnement avant de l'utiliser comme compteur ou calculateur.

1. Découverte de la pascaline

Observation de la pascaline

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	durée
Il distribue les pascalines dont il ne dit pas le nom, ni la fonction. Il laisse les élèves observer et manipuler les pascalines.	Les élèves manipulent la pascaline.	5 min
Il recueille les remarques et met en place le vocabulaire : roue qui tourne une fois = 1 clic, roue des unités, roue des dizaines, roue des centaines, nombre de clics, tourner la roue dans le sens des aiguilles d'une montre, tourner la roue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.	*« On dirait une calculatrice. »* Les élèves décrivent la pascaline : 5 roues dentées, 3 jaunes et 2 oranges. Sur les roues jaunes sont écrits les chiffres de 0 à 9 dans l'ordre. Il y a 3 petits triangles rouges qui indiquent où on doit lire. On peut tourner les roues dans les deux sens : dans le sens des aiguilles d'une montre, on avance, on ajoute. Dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, on recule, on enlève.	10 min

1.1 Découverte de la pascaline comme outil pour l'affichage d'un nombre

Il faut bien penser à faire remettre les pascalines à 0 avant chaque manipulation.

Affichage d'un nombre à 2 chiffres

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	durée
« Notez 24 sur la pascaline » L'enseignant vérifie que toutes les pascalines affichent 24 (et non 240).	Les pascalines affichent 24.	2 min
« Trouvez deux façons différentes de noter 29 sur la pascaline et écrivez	Ils proposent : Solution 1 : on fait 29 clics sur la roue des unités dans le	8 min

comment vous avez fait. » Si l'exercice est difficile, l'enseignant peut proposer un deuxième nombre à deux chiffres.	sens des aiguilles d'une montre. Solution 2 : on fait 2 clics sur la roue des dizaines et 9 clics sur la roue des unités dans le sens des aiguilles d'une montre ou 9 clics sur la roue des unités et 2 clics sur la roue des dizaines dans le sens des aiguilles d'une montre. Ils remarquent que la solution 2 est plus rapide car on ne fait que 11 clics contre 29 clics.	
« Vous allez refaire la solution 1 c'est-à-dire que vous allez afficher 29 sur la pascaline en n'utilisant que la roue des unités. Vous observerez bien ce qui se passe au niveau des roues et vous le noterez sur votre cahier. »	Ils remarquent que quand la roue des unités passe de 9 à 0, la roue des dizaines tourne en même temps de 0 à 1. C'est le passage à la dizaine supérieure. Même chose pour le deuxième passage de 19 à 20.	3 min
« Vous allez refaire la solution 2 c'est-à-dire afficher 29 sur la pascaline en faisant 9 clics sur la roue des unités et 2 clics sur la roue des dizaines. »	L'enseignant amène les élèves à remarquer que cette fois-ci on n'utilise pas le passage automatique à la dizaine. Ce sont les élèves qui l'ont anticipé.	3 min

Affichage d'un nombre à 3 chiffres

Ce que fait et dit l'enseignant	**Ce que font et disent les élèves**	**durée**
« Notez 291 sur la pascaline et expliquez comment vous avez fait. » *« Est-ce qu'on peut commencer par la roue qu'on veut ? »* *« Comment pourrait-on faire autrement ? Pourquoi ne le fait-on pas ? »*	Ils inscrivent 2 sur la roue des centaines, 9 sur la roue des dizaines et 1 sur la roue des unités. Ils essayent toutes les possibilités et s'aperçoivent que dans ce cas-là, on peut commencer par la roue qu'on veut. On pourrait tourner la roue des unités de 291 clics vers la droite mais ça prendrait trop de temps.	5 min
« Afficher sur la pascaline le plus grand nombre à 3 chiffres que vous connaissez et noter toutes les manipulations que vous avez-faites. » Comment avez-vous fait ? Si nécessaire faire d'autres manipulations avec d'autres nombres à 3 chiffres.	Les élèves affichent 999. On tourne la roue des unités de 9 clics vers la droite, la roue des dizaines de 9 clics vers la droite et la roue des centaines de 9 clics vers la droite. Certains élèves peuvent avoir affiché 999 en tournant la roue des unités d'un clic dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. On voit qu'ils ont fait 0 – 1 = 9 opération impossible. On peut utiliser la e-pascaline pour montrer que cette opération est vraiment impossible. En effet sur la e-pascaline, quand toute les roues sont à 0, il n'est pas possible de tourner les roues dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.	5 min

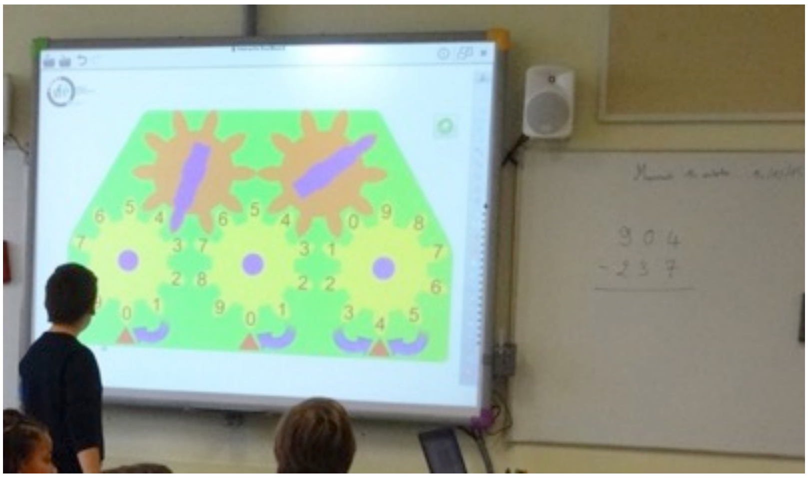


Figure 42. Utilisation de la e-pascaline pour une projection sur TBI permettant la gestion des phases collectives.

2. Découverte de la pascaline comme compteur

2.1 Découverte de la pascaline comme compteur : ajouter

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	durée
« Si vous tournez la roue des unités d'un clic dans le sens des aiguilles d'une montre, qu'est-ce que vous faites ?»	*« J'ajoute 1 Je compte de 1 en 1 J'inscris le nombre suivant. »*	3 min
« Si vous tournez la roue des dizaines d'un clic dans le sens des aiguilles d'une montre, qu'est-ce que vous faites ?»	*« J'ajoute 10. Je compte de 10 en 10. »*	3 min
« Affichez 199. Vous allez tourner la roue des dizaines d'un clic dans le sens des aiguilles d'une montre et en même temps bien observer ce qui se passe. Quel nombre obtenez-vous ? Que s'est-il passé ? »	*« J'obtiens 209. La roue des dizaines passe de 9 à 0 et en même temps la roue des centaines passe de 1 à 2. J'ai ajouté 10. »*	3 min
« Si vous tournez la roue des centaines d'un clic dans le sens des aiguilles d'une montre, qu'est-ce que vous faites ?»	*« J'ajoute 100. Je compte de 100 en 100. »*	3 min
« Affichez 305. Vous allez tourner la roue des dizaines d'un clic dans le sens des aiguilles d'une montre et en même temps bien observer ce qui se passe. Quel nombre obtenez-vous ? Que s'est-il passé ? »	*« J'obtiens 405. J'ai tourné la roue des centaines d'un clic vers la droite. Elle affichait 3 et maintenant elle affiche 4. Les autres roues n'ont pas bougé. J'ai ajouté 100. »*	3 min

2.2 Découverte de la pascaline comme compteur : retrancher

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	durée
« Inscrivez 527 sur la pascaline. Si vous tournez la roue des unités d'un clic dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, qu'est-ce que vous faites ? »	*« J'enlève 1, je retranche 1. J'inscris le nombre précédent, le nombre juste avant. »*	3 min
« Affichez 30 sur la pascaline. Vous allez tourner la roue des unités d'un clic dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et en même temps bien observer ce qui se passe. Quel nombre obtenez-vous ? Que s'est-il passé ? »	*« J'obtiens 29. En même temps que la roue des unités passe de 0 à 9, la roue des dizaines passe de 3 à 2. J'ai enlevé 1. »*	3 min
« Affichez 527 sur la pascaline. Si vous tournez la roue des dizaines d'un clic dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, qu'est-ce que vous faites ? »	*« Je recule d'une dizaine, je soustrais 10. »*	3 min
« Affichez 200. Vous allez tourner la roue des dizaines d'un clic dans le sens des aiguilles d'une montre et en même temps bien observer ce qui se passe. Quel nombre obtenez-vous ? Que s'est-il passé ? »	*« J'obtiens 190. La roue des dizaines passe de 0 à 9 et en même temps la roue des centaines passe de 2 à 1. J'ai enlevé 10. »*	3 min
« Affichez 527 sur la pascaline. Si vous tournez la roue des centaines d'un clic dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, qu'est-ce que vous faites ? »	*« Je recule d'une centaine, je soustrais 100. La roue des centaines passe de 5 à 4. La pascaline affiche 427. »*	3 min

2.3 Autres propositions sous forme de jeux (facultatif)

Anticipation

On peut imaginer des petits jeux d'anticipation : écrire ce que va faire la pascaline puis le vérifier. Voici quelques exemples.

« Ecrivez 99. Que se passe-t-il si je tourne la roue des unités d'un clic dans le sens des aiguilles d'une montre ? »

« Ecrivez 30. Que se passe-t-il si je tourne la roue des unités d'un clic dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ? »

« Ecrivez 304. Que se passe-t-il si je tourne la roue des dizaines d'un clic dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ? »

Nombre de clics

Voici quelques exemples de jeux sur le nombre de clics.

« Ecrire 25 en faisant le moins de clic possible. Réponse : 7 clics. »

« Ecrire 29 en faisant le moins de clic possible. Réponse : 4 clics (30-1). »

« Ecrire 48 en faisant le moins de clic possible. Réponse : 7 clics (50-2). »

II. PARTIE 2, SÉANCE 1, FAIRE DES SOUSTRACTIONS AVEC LA PASCALINE

1. Observation de la pascaline

Si l'enseignant fait le choix de faire la séance 0, il commence directement au point 2. Soustraction sans retenue et manipulation de la pascaline guidée.
Sans consigne particulière, les élèves travaillent en binôme.

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	durée
Il distribue les pascalines dont il tait le nom et la fonction. Il laisse les élèves les observer. Il recueille les remarques des élèves.	Ils manipulent les roues jaunes et orange dans un sens et dans l'autre. Ils affichent des nombres. Ils s'aperçoivent du passage automatique à la dizaine ou à la centaine. Ils remarquent que : - la roue de droite est la roue des unités, la roue du milieu est la roue des dizaines, la roue de gauche la roue des centaines. - quand on tourne une roue dans le sens des aiguilles d'une montre, on ajoute, quand on tourne une roue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, on enlève. - après 9 sur une roue, la roue à sa gauche tourne automatiquement si on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. - après 0 sur une roue, la roue à sa gauche tourne automatiquement si on tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. On se met d'accord pour appeler « clic » ou « cran » le fait de tourner une roue.	10 min

Figure 43. Découverte de la pascaline par des élèves de cycle 3.

2. Soustraction sans retenue et manipulation de la pascaline guidée

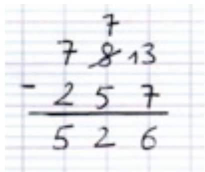
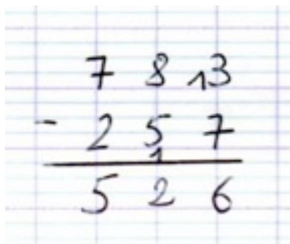
Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	durée
Il demande aux élèves d'afficher le nombre 238 sur la machine. Il circule dans les rangs pour	Ils affichent 2 sur la roue des centaines, 3 sur la roue des dizaines et 8 sur la roue des unités.	15 min

s'assurer que chaque binôme a réussi. Il dit et écrit au tableau la consigne suivante : - « *tourner la roue des unités de 3 crans dans le sens contraire des aiguilles d'une montre* *-tourner la roue des dizaines de deux crans dans le sens contraire des aiguilles d'une montre* *-tourner la roue des centaines d'un cran dans le sens contraire des aiguilles d'une montre* ». Question : *« Qu'affiche la machine ? Qu'a-t-elle fait ? Comment peux-tu vérifier ce qu'elle a fait ?»* Il passe dans les rangs pour aider ceux qui ont des difficultés.	Ils effectuent la consigne en manipulant leur machine. Ils notent le résultat obtenu sur leur cahier. Réponse attendue 115. Ils expliquent ce que la machine a fait. Selon les binômes, elle a fait une soustraction ou elle a reculé. Ils vérifient le calcul : - soit en posant la soustraction ou l'addition correspondante, - soit en utilisant la calculatrice.	
Pour un bilan collectif, il choisit un ou deux groupe(s) en fonction des réponses qu'ils proposent.	Chaque groupe passe au tableau pour expliquer ce qu'il a trouvé et comment il a fait. Il pose la soustraction ou l'addition correspondante pour vérifier l'affichage de la pascaline.	5 min

3. Soustraction sans retenue et manipulation de la pascaline non guidée

Ce que fait et dit l'enseignant	**Ce que font et disent les élèves**	**durée**
Il dit et note au tableau. *« Effectuez avec la machine 759 – 234. Quel résultat affiche-t-elle ? Vérifier le résultat. »* Il demande une trace écrite de la vérification. Il passe dans les rangs pour aider les élèves en difficultés.	Ils effectuent la consigne en manipulant leur machine et écrivent leur réponse sur leur cahier. Réponse attendue : 525. Difficultés des élèves : Certains vont afficher 759 puis ensuite afficher 234 et se rendre compte qu'ils sont bloqués. D'autres vont faire les actions attendues mais dans le sens des aiguilles d'une montre. D'autres vont faire les bons gestes en commençant par la gauche et enfin d'autres en commençant par la droite. Ils posent l'opération pour vérifier leur résultat. L'opération posée permet aux élèves de se rendre compte de leurs erreurs.	15 min
Pour un bilan collectif, il choisit un ou deux groupe(s) en fonction des réponses qu'ils proposent. Il met en évidence l'erreur suivante : tourner les roues dans le mauvais sens (addition). Il montre que la pascaline affiche le même résultat qu'on commence par les unités ou les centaines pour le deuxième terme. Il impose de toujours commencer par les unités pour se conformer à la technique opératoire et pour faciliter le déroulement des défis de la séance 2.	Chaque groupe passe au tableau pour expliquer ce qu'il a trouvé et comment il a fait. Chaque binôme le constate en manipulant sa pascaline.	5 min

4. Soustraction avec retenue et manipulation de la pascaline non guidée

Ce que fait et dit l'enseignant	**Ce que font et disent les élèves**	**durée**
Il dit et note au tableau. *« Avec votre machine, effectuez 783 – 257. Qu'observez-vous ? Formuler votre observation par une ou deux phrases. Vérifiez votre résultat. »*	Ils effectuent la consigne en manipulant leur machine et écrivent leur réponse sur leur cahier. Réponse attendue : 526.	5 min
Pour un bilan collectif, il choisit un ou deux groupe(s) en fonction des réponses qu'ils proposent. Il peut utiliser la pascaline pour montrer que le résultat de 783 – 257 est le même que celui de 793 – 267.	Un groupe passe au tableau pour expliquer ce qu'il a trouvé et comment il a fait. Ils indiquent que la roue des dizaines saute un cran sans qu'on l'ait touchée, au moment du quatrième cran tourné sur celle des unités. Comme on n'avait plus d'unité, on a « cassé » une dizaine. Soit un élève, soit l'enseignant pose la soustraction et la résout en cassant une dizaine.  *Figure 44. Etat final d'une soustraction posée et calculée avec la méthode de fractionnement des dizaines.* Soit un élève, soit l'enseignant pose la soustraction et la résout en ajoutant une dizaine au premier et au deuxième terme.  *Figure 45. Etat final d'une soustraction posée et calculée avec la méthode de conservation des écarts. Avec les deux retenues, c'est une dizaine qui est ajouté au terme d'en haut et une dizaine ajoutée au terme d'en bas, ce qui ne change pas la différence entre les deux termes.*	10 min

5. Institutionnalisation

L'enseignant met l'accent sur le vocabulaire de la numération décimale de position : 783 c'est 7 centaines, 8 dizaines et 3 unités.
Sur l'exemple sans retenue : 238 – 123, on place les nombres l'un sous l'autre en alignant bien les chiffres des unités, les chiffres des dizaines, les chiffres des centaines, on a 2 centaines, 3 dizaines et 8 unités auxquelles on veut enlever 1 centaine, 2 dizaines et 3 unités. On commence par les unités, 3 enlevé à 8 ça fait 5, 2 enlevé à 3 ça fait 1 et 1 enlevé à 2 ça fait 1.

Sur l'exemple avec retenue : 783 – 257, on place les nombres l'un sous l'autre en alignant bien les chiffres des unités, les chiffres des dizaines, les chiffres des centaines, on a 7 centaines, 8 dizaines, et 3 unités auxquelles on veut enlever 2 centaines, 5 dizaines et 7 unités (cf. Figure 44). On commence par les unités : 3 moins 7, ce n'est pas possible donc on va emprunter une dizaine aux 8 dizaines, il reste 7 dizaines et on a 13 unités auxquelles on enlève 7 unités ça fait 6 unités. 7 dizaines qui restent moins 5 dizaines, ça fait 2 dizaines. 7 centaines moins 2 centaines ça fait 5 centaines. On obtient donc 526.

Trace écrite proposée par l'enseignant :
« On a épuisé toutes les unités sur la roue des unités donc il faut casser une dizaine en dix unités afin de pouvoir prendre des unités. Sur la pascaline, cela se traduit par le fait que la roue des dizaines tourne d'un cran automatiquement. »

A la fin de cette séance, l'enseignant peut leur demander de comparer deux instruments de calcul : la pascaline et la calculatrice. Les deux instruments affichent le résultat. Sur la calculatrice, l'utilisateur affiche le deuxième terme de l'opération alors que sur la pascaline, le deuxième terme n'est pas affiché mais il permet de mettre les roues en mouvement.
Cette séquence peut aussi être l'occasion de demander aux élèves d'anticiper le résultat sans utiliser la machine

III. PARTIE 3, SÉANCE 2, COMPRENDRE LE SENS DE LA RETENUE AVEC LA PASCALINE

Cette séance est longue et peut être faite en plusieurs fois à l'appréciation de l'enseignant.

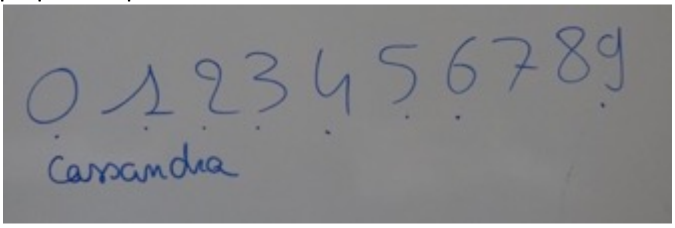
1. Réinvestissement de la séance 1 avec une ou plusieurs soustractions avec retenue

Ce que fait et dit l'enseignant	**Ce que font et disent les élèves**	**durée**
L'enseignant invite les élèves à rappeler ce qui a été fait lors de la séance précédente. L'enseignant distribue une pascaline par binôme, dit et écrit au tableau la consigne suivante : « *Avec votre machine, effectuez 549 – 253.* *Quel résultat s'affiche ? A quel moment et quelle roue change automatiquement ?* »	Ils rappellent que la pascaline sert à faire des additions ou des soustractions, qu'il y a 3 roues bien identifiées et qu'il faut tourner dans le sens inverse des aiguilles d'une montre pour une soustraction. Ils peuvent faire remarquer que la pascaline affiche un nombre allant jusqu'à 999. Ils évoquent la retenue qui correspond au passage automatique d'une roue. Les élèves manipulent leur pascaline et répondent par écrit à la question posée. La pascaline affiche 296. Ils expliquent que la roue des centaines tourne d'un cran sans qu'on l'ait touchée au cinquième cran sur celle des dizaines.	5 min
Pendant le bilan collectif, il choisit un ou deux groupe(s) en fonction des réponses qu'ils proposent. Il peut proposer d'autres soustractions si de nombreux élèves ont encore des difficultés pour utiliser la pascaline.	Chaque groupe passe au tableau pour expliquer ce qu'il a trouvé et fait la vérification.	5 min

2. Anticipation du passage automatique quand l'enseignant donne l'opération.

Défi 1

Ce que fait et dit l'enseignant	**Ce que font et disent les élèves**	**durée**
Il demande aux élèves de ranger temporairement leur machine. Il dit et écrit au tableau la consigne :	Ils discutent en binômes, écrivent de façon individuelle quelques phrases expliquant leur réponse. Certains posent la soustraction et reprennent le cassage de	10 min

« Voici une soustraction : 467 – 282. Sans toucher la machine, imaginez quelle roue de la machine va tourner automatiquement et à quel moment. Vous devez écrire une phrase pour répondre dans votre cahier. » Il circule dans les rangs et s'assure que les élèves comprennent l'expression « à quel moment ? », il peut faire référence aux phrases qui ont été écrites pendant les séances précédentes. Pour les binômes n'ayant pas compris, il peut les autoriser à reprendre une pascaline et leur fait écrire tout ce qu'affiche la pascaline étape après étape.	la dizaine ou de la centaine vue précédemment. Certains dessinent les roues et imaginent les roues tourner ou font une suite de chiffres de 0 à 9 (Figure 46) et expliquent à partir de cette suite.  *Figure 46.* Certains écrivent ce que la pascaline va afficher. Ils expliquent que la roue des centaines va tourner automatiquement quand on va arriver au septième clic sur la roue des dizaines. La pascaline sert d'outil de vérification.	
Pendant le bilan collectif, il invite les élèves qui ont une explication intéressante à passer au tableau. Il peut conclure en écrivant des phrases du type : *« On ne peut pas enlever 8 dizaines à 6 dizaines, il faut donc d'abord enlever 6 dizaines, la roue des dizaines affiche alors 0. Il faut transformer une centaine en 10 dizaines donc la roue des centaines tourne automatiquement lorsqu'on a tourné celle des dizaines pour la septième fois. »*	Les binômes sélectionnés passent au tableau expliquer leur démarche. Facultatif : Les élèves recopient les phrases écrites au tableau suite au débat ou collent un bilan donné par l'enseignant.	5 min

Défi 2

Ce défi se fait individuellement

Ce que fait et dit l'enseignant	**Ce que font et disent les élèves**	**durée**
Consigne : *« Voici une soustraction : 784 – 267. Sans toucher la machine, imaginez quelle roue de la machine va tourner automatiquement et à quel moment. »* Même déroulement que l'exemple précédent sans débat collectif. Une correction est faite. L'enseignant peut faire un troisième exemple si besoin. Il peut proposer une opération avec deux passages automatiques par exemple 924 – 539.	Les élèves cherchent de façon individuelle et expliquent leur démarche par écrit. Ils peuvent utiliser une des trois techniques du défi 1. Ils expliquent que la roue des dizaines va tourner automatiquement quand on va arriver au cinquième clic sur la roue des unités. Un élève passe au tableau pour corriger.	5 min

3. Trouver l'opération quand l'enseignant donne le passage automatique

Défi 3

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	durée
Il donne la consigne suivante : « *La machine est autorisée. Choisir les nombres à soustraire pour que la roue des centaines et seulement cette roue tourne automatiquement lorsqu'on a tourné celle des dizaines pour la deuxième fois. Vous écrirez votre réponse ou vos idées dans votre cahier.* » Pour ceux qui vont plus vite, dans un premier temps l'enseignant propose de chercher d'autres exemples, le plus possible. Pour ceux qui ont trouvé beaucoup d'exemples et qui n'en trouvent plus : *« Essayez de trouver ce qu'il y a de semblable dans toutes les opérations, ce qu'il faut pour que ça marche. »*	Ils échangent, manipulent leur pascaline et écrivent les deux termes de leur soustraction dans leur cahier de recherche. Ils s'interrogent sur les différentes contraintes : -le premier terme doit être plus grand que le deuxième. Et dans ce défi : - il faut que le premier terme ait 3 chiffres et que le deuxième ait 2 ou 3 chiffres. - il faut que le chiffre des unités du deuxième terme soit inférieur ou égal au chiffre des unités du premier. - il faut que le chiffre des dizaines du premier terme soit 1. - il faut que le chiffre des dizaines du deuxième terme soit supérieur ou égal à 2.	5 min
Pendant le bilan collectif, il recense toutes les propositions. Quand toutes les propositions sont écrites, il est plus aisé de voir certains invariants. Il conclut sur la façon dont on peut s'y prendre pour concevoir ces exemples en s'appuyant sur des remarques d'élèves.	Toutes les solutions proposées par les élèves sont écrites au tableau et l'ensemble de la classe vérifie sur la pascaline. Suivant le niveau de la classe on peut remarquer un certain nombre de contraintes voire toutes.	5 min

Défi 4

Ce que fait et dit l'enseignant	Ce que font et disent les élèves	durée
Il donne la consigne suivante : « *Inventer une soustraction pour laquelle la roue des dizaines tourne automatiquement lorsqu'on tourne la roue des unités pour la huitième fois.* » Pour ceux qui vont plus vite, l'enseignant propose, dans un premier temps, de chercher d'autres exemples, le plus possible. Pour ceux qui ont trouvé beaucoup d'exemples et qui n'en trouvent plus : *« Essayez de trouver ce qu'il y a de semblable dans toutes les opérations, ce qu'il faut pour que ça marche. »*	Ils travaillent en binômes avec ou sans leur pascaline, selon leur choix. Ils écrivent les deux termes de leur soustraction sur leur cahier. Ils s'interrogent sur les différentes contraintes : -le premier terme doit être plus grand que le deuxième. Et dans ce défi : - il faut que le premier terme ait 2 ou 3 chiffres et que le deuxième ait 1, 2 ou 3 chiffres. - il faut que le chiffre des unités du premier terme soit 7. - il faut que le chiffre des unités du deuxième terme soit 8 ou 9.	10 min
Pendant le bilan collectif, il recense toutes les propositions. Quand toutes les propositions sont écrites, il est plus aisé de voir certains invariants.	Toutes les solutions proposées par les élèves sont écrites au tableau et l'ensemble de la classe vérifie sur la pascaline. Suivant le niveau de la classe on peut remarquer un certain nombre de contraintes voire toutes.	5 min

4. Autres propositions

Il est aussi possible de donner un défi à faire à la maison l'objectif est d'obliger les élèves à se détacher de l'outil pascaline et réussir à faire de l'abstraction.

Défi 5
« Inventer une soustraction pour laquelle la roue des dizaines tourne automatiquement lorsqu'on tourne la roue des unités pour la sixième fois et la roue des centaines tourne automatiquement lorsqu'on tourne la roue des dizaines pour la quatrième fois. »

Défi 6
« Inventer une soustraction pour laquelle deux roues sautent un cran automatiquement. »

Défi 7
« Inventer une soustraction pour laquelle les deux roues tournent simultanément. »

Chapitre X.
PROLONGEMENTS POSSIBLES ET VISITE AU MUSÉE

Résumé

La pascaline est un moyen d'amener les élèves à questionner d'autres propriétés des nombres et d'explorer quelques aspects historiques et culturels des mathématiques.

I. UTILISER LA PASCALINE POUR D'AUTRES NOTIONS MATHÉMATIQUES

L'enseignant peut envisager :

- d'utiliser sur un exemple la pascaline pour effectuer une addition, des opérations avec des nombres décimaux non entiers (en manipulant la virgule de la pascaline)... Il peut l'utiliser dès qu'une difficulté apparaît (par exemple, lors des encadrements au dixième en sixième où certains élèves proposent un encadrement du type $2,9 < 2,914 < 2,10$) ;
- de passer rapidement à des exercices de type résolution de problèmes, des exercices de calcul mental, des exercices sur les ordres de grandeur…
- d'institutionnaliser le vocabulaire, la technique opératoire de la soustraction dans le cahier de leçon ;
- de proposer à ses élèves de réaliser un exposé sur Blaise Pascal et la pascaline, ou donner un devoir maison sur ce thème…
- de l'utiliser en introduction de la multiplication comme addition itérée. Dans ce cas, il faut prévoir un compteur pour garder en mémoire le nombre d'additions.

Enfin, l'enseignant pourrait avoir recours la pascaline à d'autres moments de l'année (en fin de cette séquence ou même à des moments complètement différés dans la progression) et lancer des défis du type : « Inventer une opération dont le résultat est … avec le nombre de clics le plus petit possible pour effectuer l'opération. »

II. LA MACHINE D'ARITHMÉTIQUE AU MUSÉUM HENRI LECOQ

Figure 47. A gauche, machine du chevalier Durant-Pascal exposée au musée d'Art Roger-Quilliot, à droite machine de Marguerite Périer exposée au muséum Henri-Lecoq, propriétés de la ville de Clermont-Ferrand (crédit photo Adeline Girard).

Seuls huit exemplaires originaux des machines réalisées par Pascal sont parvenus jusqu'à nous, dont deux sont la propriété de la Ville de Clermont-Ferrand. La Machine de Marguerite Périer est visible au muséum Henri Lecoq tandis que celle du chevalier Durant-Pascal est exposée au Musée d'Art Roger-Quilliot (MARQ).

Le muséum Henri Lecoq dispose de plusieurs outils de médiation accessibles au public sous diverses formes :

- une reproduction fonctionnelle à l'identique, fabriquée par Pierre Chartier à la demande du musée (Figure 48). Cette reproduction permet des démonstrations au public par les médiateurs scientifiques du musée ;

Figure 48. Reproduction moderne de la pascaline réalisée par Pierre Chartier, visible au musée Lecoq de Clermont-Ferrand.

- une machine virtuelle sur écran tactile, réalisée par Christophe Bascoul, et qui permet au visiteur de simuler le fonctionnement de la machine et d'observer son mécanisme intérieur (Figure 49 et Figure 52) ;

- une reproduction à l'échelle 10, réalisée par Delphin Theallier, du *sautoir*, mécanisme inventé par Pascal pour résoudre mécaniquement le problème du passage automatique à l'unité supérieure (Figure 50) ;

- une pascaline réalisée sur imprimante 3d, qui peut être manipulée par le public ou en classe par les élèves (Figure 54).

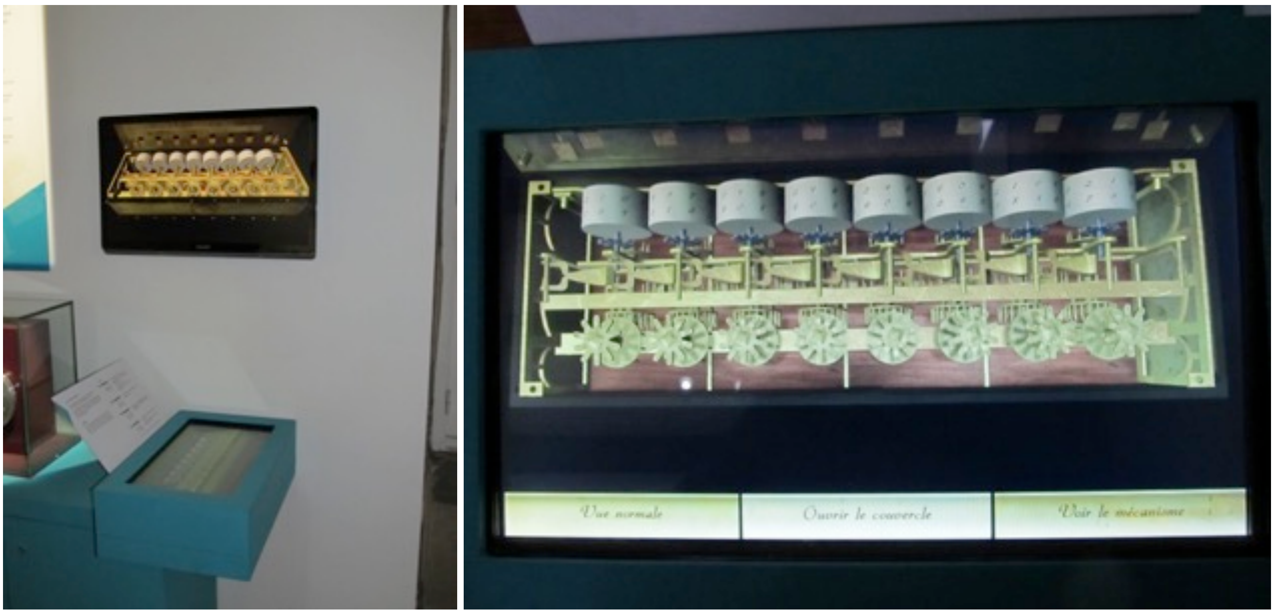


Figure 49. Machine virtuelle réalisée par Christophe Bascoul, (crédit photo Amandine Schmaltz).

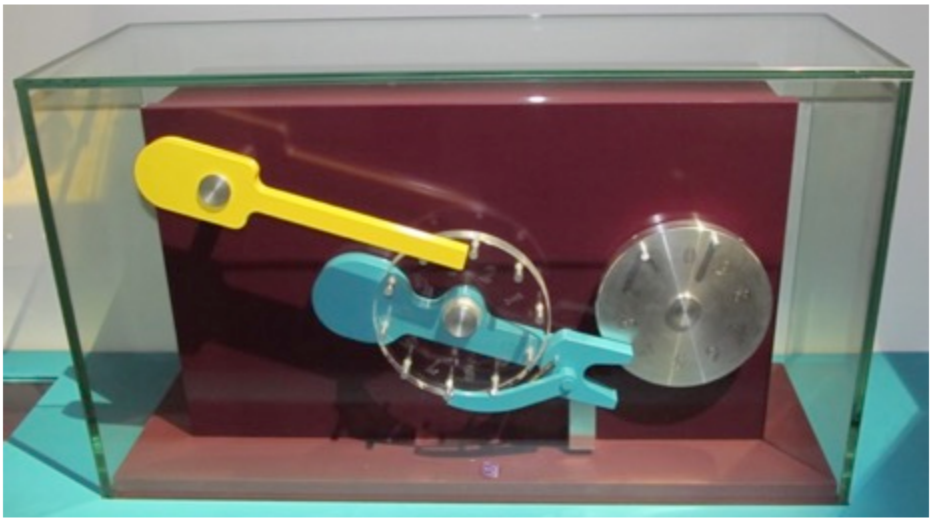


Figure 50. Maquette du détail de l'engrenage de la Pascaline historique, visible au muséum Henri Lecoq (crédit photo Amandine Schmaltz).

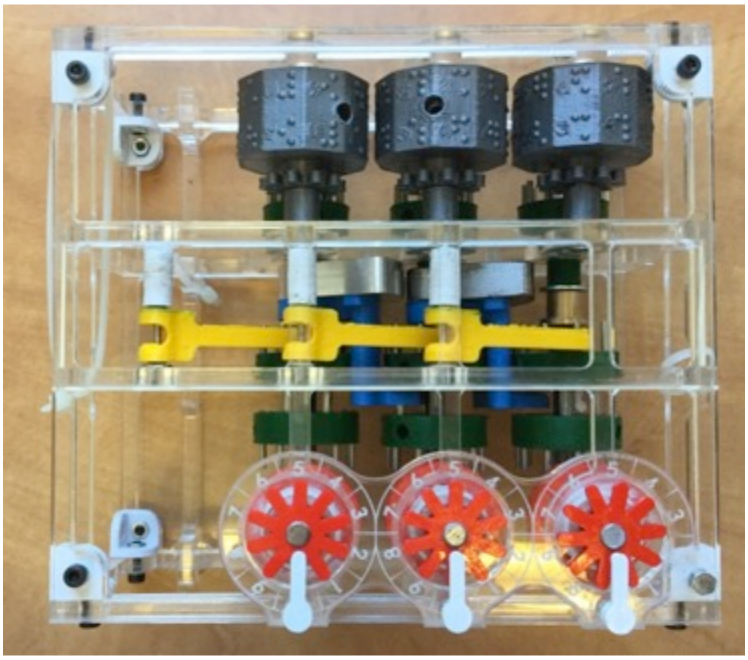


Figure 51. Maquette de la Pascaline réalisée en imprimante 3D, manipulable par les élèves.

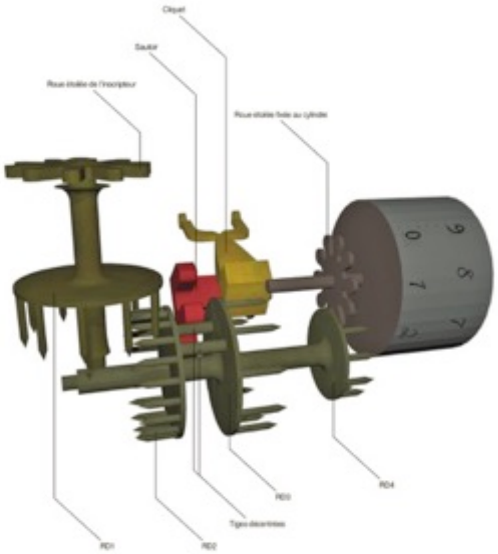


Figure 52. Simulation virtuelle du bloc comprenant la roue de l'inscripteur et celle du totaliseur.

Dans le cadre des visites scolaires, le muséum Henri Lecoq organise une animation pour les cycles 2 et 3 autour de l'histoire du calcul à travers quelques instruments de calcul dont la Pascaline.
De plus, le muséum prête une mallette pédagogique pour le cycle 3 qui s'intitule « Des engrenages pour additionner » dont l'objectif est de faire comprendre le fonctionnement de la Pascaline historique aux élèves en manipulant.

Figure 53. Éléments de la mallette pédagogique prêtée par le musée Lecoq pour découvrir l'usage des engrenages et le fonctionnement de la Pascaline.

Les élèves peuvent travailler par groupes de trois ou quatre et réaliser des montages pour comprendre le fonctionnement des engrenages (Figure 53). Pour terminer, ils construisent une partie de la Pascaline : un bloc comprenant la roue de l'inscripteur et celle du totaliseur.

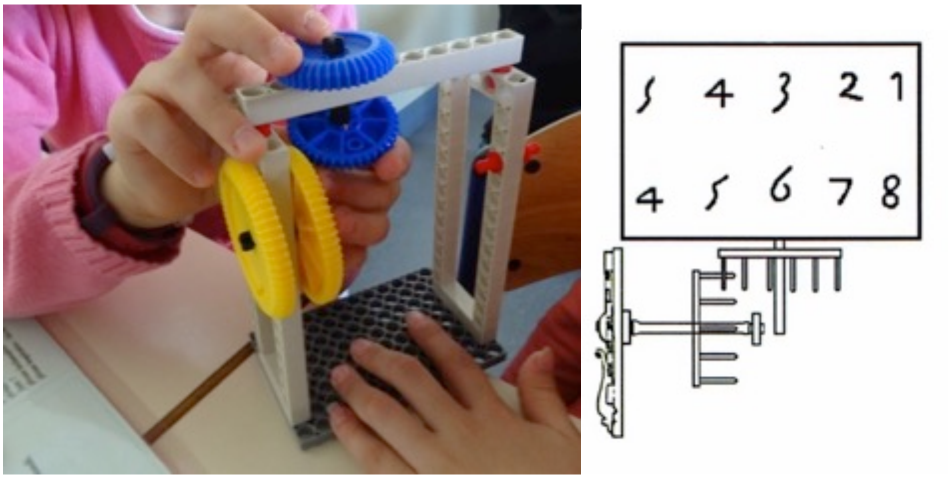


Figure 54. Maquette d'une partie de la pascaline réalisée avec les éléments de la mallette pédagogique. L'engrenage n'est pas plan mais dans deux plans orthogonaux, contrairement à la pascaline utilisée en classe.

III. FAIRE UN EXPOSÉ EN CLASSE SUR BLAISE PASCAL

A partir de leur visite au musée, les élèves peuvent réaliser des affiches sur le thème de la Pascaline et l'œuvre de Blaise Pascal et utiliser ces supports pour faire un exposé de son œuvre (Figure 55 et Figure 56).

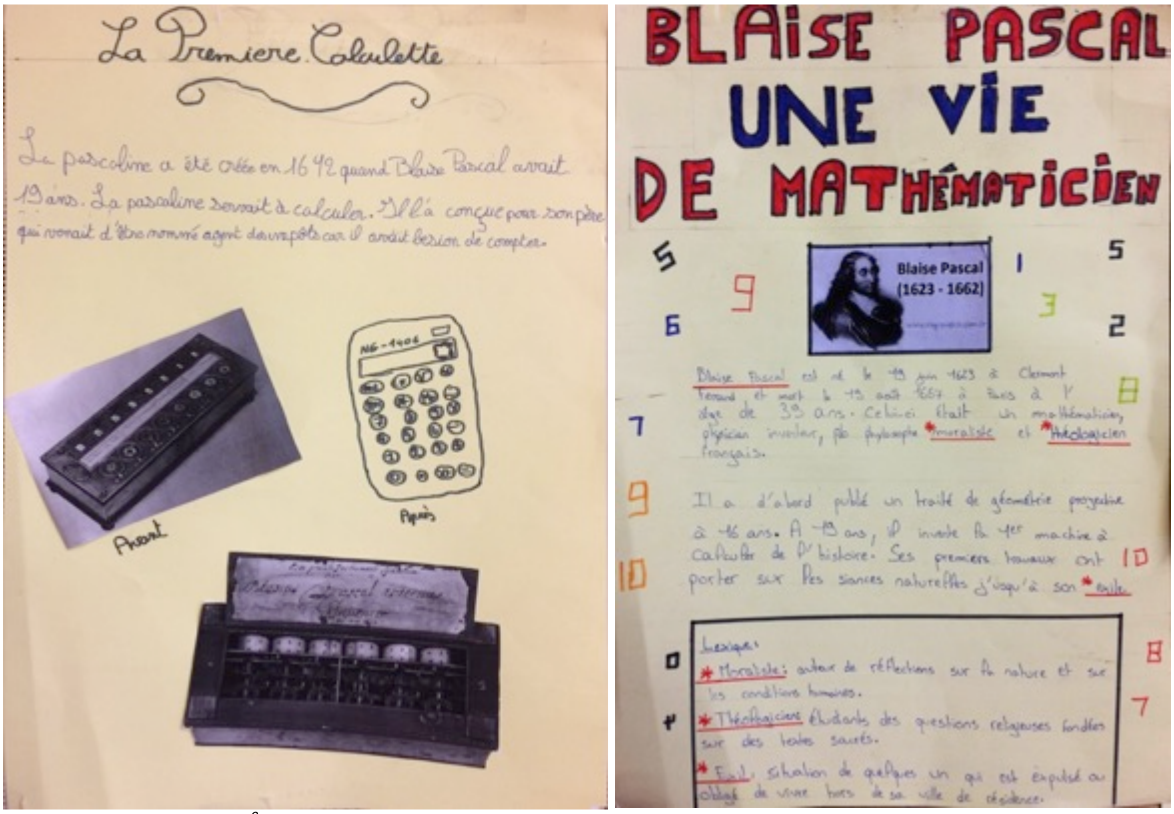


Figure 55. Affiches d'élèves de 6e sur la Pascaline historique inventée par Blaise Pascal, classe de Séverine Fleury, collège de la Comté.

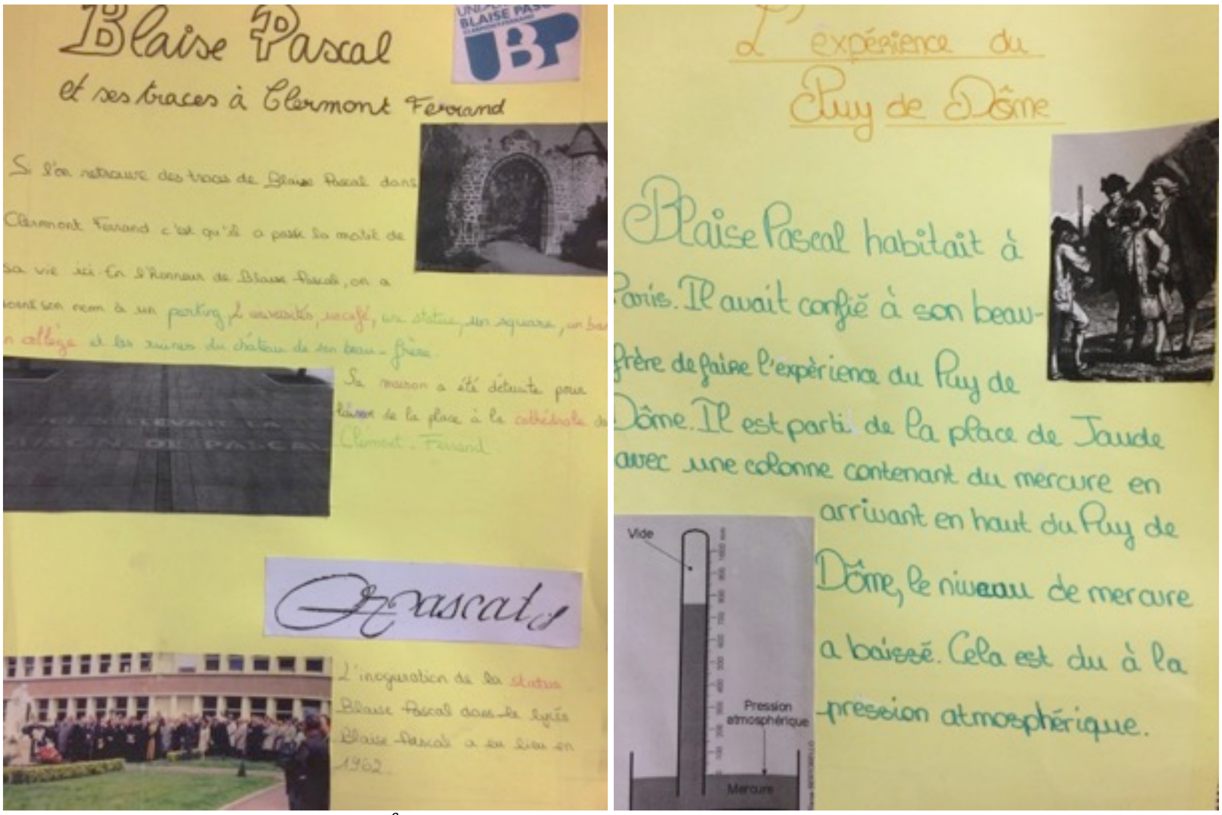


Figure 56. Affiches d'élève de 6e sur l'œuvre de Blaise Pascal, classe de Séverine Fleury, collège de la Comté.

Partie 3.
Compléments didactiques

Annie NOIRFALISE
Maître de Conférences
I.R.E.M. de Clermont Ferrand

Chapitre XI.
LEXIQUE : DE L'ÉNUMÉRATION AU DÉNOMBREMENT, QUELQUES DÉFINITIONS ET REMARQUES DIDACTIQUES

Numéroter (Référence LAROUSSE)
Numéroter consiste à attribuer un code unique, appelé numéro, à chacun des éléments d'un ensemble. Bien que les numéros soient généralement des nombres, ils ne représentent pas une quantité, mais ils permettent une relation ordonnée sur les éléments numérotés, et fournissent de nombreux exemples de numération ordinale.

Compter (Référence LAROUSSE)
Compter consiste à réciter une suite ordonnée de mots. Ces mots représentent des nombres, et leur suite est appelée chaine numérique. Compter les éléments d'un ensemble consiste à les mettre en correspondance un à un avec les nombres successifs. Il s'agit en quelque sorte d'une numérotation. Compter des éléments nécessite à la fois de savoir réciter les entiers naturels dans l'ordre, de savoir pointer, généralement de la main ou du regard, des éléments, et de savoir coordonner la motricité, l'activité sensitive (visuelle ou tactile) et le langage.

Dénombrer (Référence LAROUSSE)
Dénombrer consiste à déterminer la quantité d'éléments d'un ensemble par le biais du comptage ou du calcul. Cela revient donc à compter ou calculer ces éléments et à les nombrer. Aussi, un enfant sait dénombrer lorsque la technique du comptage est acquise et qu'il sait que le dernier mot employé représente la quantité des éléments comptés.

De l'énumération au dénombrement (Référence Joël BRIAND), le rôle de l'énumération dans le mesurage d'une collection
De nombreux paramètres doivent être pris en compte pour rendre un dénombrement efficace. Notons que certains auteurs font la différence entre dénombrer et compter :

- **Compter** une collection c'est énoncer une suite de mots qui établit une bijection entre un sous ensemble de la collection des mots-nombres de la comptine numérique (stable, conventionnelle et totalement ordonnée) et les objets de la collection.
- **Dénombrer** une collection : c'est compter et définir le cardinal de la collection énumérée par le dernier mot nombre énoncé.

L'apprentissage visé scolairement porte sur le dénombrement d'une collection. Prenons, pour définition, les propos de Joël Briand (1999, p. 9)[32].

« Pour dénombrer une collection finie montrée, l'élève doit nécessairement :

1. *Être capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.*
2. *Choisir un élément d'une collection.*
3. *Énoncer un mot-nombre (« un » ou le successeur du précédent dans une suite de mots-nombres).*
4. *Conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis.*
5. *Concevoir la collection des objets non encore choisis.*
6. *Recommencer (pour la collection des objets non encore choisis) 2-3-4-5 tant que la collection des objets à choisir n'est pas vide.*

---

[32] BRIAND J. (1999). Enseigner l'énumération en moyenne section. *Grand N, n°66*, pp. 7 à 22.
BRIAND J. (1993). *L'énumération dans le mesurage des collections. Un dysfonctionnement dans la transposition didactique*. Thèse de l'Université de Sciences et Technologies - Bordeaux I.

7. *Savoir que l'on a choisi le dernier élément.*
8. *Énoncer le dernier mot-nombre. »*

Joël Briand complète cette définition par la remarque suivante :

« Les étapes 1, 2, 4, 5, 6, 7 constituent une tâche que nous appellerons tâche d'inventaire, au cours de laquelle il s'agit de passer en revue tous les éléments d'une collection finie une fois et une seule.» (*ibid*. p. 9).

Dans l'ouvrage « Des situations pour apprendre le nombre » (2006), il précise :

« Les étapes 1, 2 et 7 relèvent de la nécessité de concevoir ce qu'est une collection (la collection n'est pas un objet réel, c'est un ensemble d'objets réunis dans un lieu de l'espace en fonction d'un critère a priori déterminé par le sujet. On est certain que l'élève a bien défini la collection quand il est capable de l'identifier comme un seul et même objet, c'est-à-dire de la reconnaître comme identique, après qu'elle ait subi une transformation) ; l'étape 3 relève du principe de bijection (c'est mettre en correspondance correctement les mots et les objets) ; l'étape 8 relève du principe cardinal ; mais la séquence (1, 2, 4, 5, 6, 7) constitue une tâche bien spécifique que l'on nomme : « tâche d'inventaire ou d'énumération ».

De nombreux essais, avec des échecs pour montrer l'intérêt de chacune des étapes évoquées précédemment, sont certainement nécessaires pour arriver à leur maitrise. Si les collections proposées aux élèves sont déjà organisées pour permettre aisément l'énumération des éléments en les parcourant de gauche à droite et de haut en bas..., pas de tâtonnement possible afin de construire des éléments techniques, d'en comprendre la justification, (éléments technologiques), outillant l'énumération.

A propos de l'étape 8, relevant d'après Joël Briand du « principe du cardinal », il est nécessaire de s'assurer que ce dernier mot-nombre énoncé soit bien un nombre pour les élèves. Il n'est pas sûr que, pour tous les élèves, la construction des entiers naturels comme nom pour les différentes valeurs des quantités ait été faite. Le mot « six » devient un nombre quand il est détaché du contexte et qu'il représente un nom pour toutes les collections pouvant être mises en correspondance terme à terme avec la suite numérique « 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ». Pour certains élèves, le dernier mot nombre énoncé ne représente pas forcément le cardinal de la collection dénombrée.

Chapitre XII.
MESURES ET GRANDEURS
SYSTÈME DE NUMÉRATION

Résumé

Le texte qui suit a été rédigé suite aux échanges dans le groupe Pascaline.
Il aborde la fonction des nombres pour mesurer les grandeurs, les systèmes de numération et plus particulièrement le système décimal de position

Actuellement on assiste à de nombreuses discussions entre « spécialistes », suscitées par les évaluations publiées récemment par la DEPP : « Évolution des acquis en début de CE2 entre 1999 et 2013 : les progrès observés à l'entrée au CP entre 1997 et 2011 ne sont pas confirmés ». Les débats mettent en cause l'enseignement des nombres à l'école élémentaire, pour mieux comprendre les arguments avancés, il semble nécessaire, de se poser une question toute simple : pourquoi enseigner des mathématiques et, pour ce qui nous intéresse ici pourquoi enseigner les nombres ? C'est le premier point sur lequel je reviendrai ci-dessous.

Les nouveaux programmes de mathématiques, publiés en 2015 et mis en place à la rentrée 2016, font largement référence aux grandeurs et à leurs mesures, il semble nécessaire que les professeurs des écoles aient des idées précises sur ce thème.

I. LES GRANDEURS

S'intéresser aux grandeurs permet de percevoir la fonction des nombres, (et plus tard des mathématiques plus complexes), pour connaître le monde dans lequel nous vivons.
Je dirais qu'on enseigne les nombres, parce que ça sert à répondre à des questions que l'on peut se poser sur le monde qui nous entoure, essentiellement, dans un premier temps, des questions qui portent sur des grandeurs : qu'est-ce qui est aussi grand que ? Quelle quantité restera-t-il si j'enlève ça ? Quelle quantité j'aurai si je partage en plusieurs parties ? .... Et les nombres, entiers tout d'abord, décimaux et rationnels ensuite, sont de prodigieux outils pour évaluer et prévoir la valeur de grandeurs, soumises à des manipulations : partages, réunions... sans avoir à faire effectivement ces manipulations. Dans les lignes qui suivent nous allons tenter, dans un premier temps, de préciser ce que l'on entend par grandeur. Dans un second temps nous reviendrons sur la mesure des grandeurs passant ainsi du monde matériel au monde mathématique, plus exactement numérique. Enfin nous reviendrons à des considérations plus didactiques.

1. Nature des grandeurs

Quand on parle de grandeurs, on s'intéresse à des éléments du monde sensible

La notion de « grandeur » n'est pas simple à définir car elle renvoie à la prise en compte de données relevant du monde matériel, physique ou vivant, et fait intervenir des pratiques sociales en général implicites. Précisons :

- prise en compte de données pouvant être de nature très différentes : ainsi dira-t-on qu'il fait chaud ou froid dans une pièce ; qu'une personne est plus ou moins aimable ou intelligente qu'une autre ; qu'une valise est plus ou moins lourde qu'un sac ; qu'un objet vendu est plus ou moins cher qu'un autre ; qu'une distance est plus ou moins grande ; qu'un chien est plus ou moins méchant que le mien ; etc.

- chacune des assertions précédentes porte implicitement sur une grandeur dont la nature relève d'un consensus social. En effet prononcer de telles assertions suppose qu'on a la possibilité de se centrer sur une caractéristique ou un comportement d'un élément du monde qui nous entoure (objet matériel, phénomène physique, comportement d'être vivant...), en négligeant les autres attributs de l'élément auquel on s'intéresse et en étant compris de la communauté à laquelle on s'adresse. Il ne nous vient généralement pas à l'idée de comparer à la fois la masse d'un objet, par exemple d'un légume, et la température qui est la sienne dans le magasin qui le vend, parce nous avons appris à construire deux grandeurs différentes « masse » et « température », associées à un même objet, deux grandeurs qui ne sont pas de même nature et qui interviennent pour accomplir des tâches différentes. Ces apprentissages ne relèvent pas, pour la plupart, d'activités à intention didactique mais se font par imprégnation, par ajustement à des pratiques sociales fonctionnelles pour accomplir certaines tâches : la température pour s'habiller plus ou moins chaudement, l'amabilité pour choisir ses fréquentations...
- chacune des assertions précédentes correspond à un jugement portant sur une grandeur d'une nature donnée. L'aptitude à porter un tel jugement suppose elle-même qu'on ait au préalable fréquenté des situations ou rencontré des phénomènes de même nature, possédant un caractère commun, afin de pouvoir comparer ce que l'on pourrait appeler, sur les exemples précédents, la température, l'amabilité, l'intelligence, la masse, le prix, la longueur, la méchanceté…, catégories que l'on désigne sous le terme de grandeurs. Si l'on s'intéresse à des grandeurs de même nature, par exemple la température de deux pièces, alors il devient souvent possible de les comparer, donc de dire si elles sont égales, différentes, et parfois, dans un tel cas, de dire que l'une est plus grande ou plus petite que l'autre. Une telle comparaison peut être obtenue soit de manière subjective, à travers la perception du chaud ou du froid qu'une personne éprouve, soit de manière plus objective – mais néanmoins entachée d'une certaine incertitude, comme tout procédé physique d'évaluation – par exemple à partir de la comparaison de la hauteur d'une colonne d'alcool dans un tube et de sa variation éventuelle d'une pièce à une autre.

On peut faire l'hypothèse que la construction de ce qu'est une grandeur d'un type donné se fait surtout dans des activités de comparaison de deux éléments relevant de cette grandeur où, par un effort d'abstraction, on est amené à sélectionner les caractéristiques pertinentes pour conclure.

2. Comparaison de grandeurs

2.1 De quoi s'agit-il ?

Dans une situation impliquant des tas de pommes, par exemple, on peut devoir comparer ces objets de multiples façons pour répondre à différentes questions que l'on peut se poser : on peut s'intéresser au volume occupé par chaque tas, au poids des fruits dans chaque tas, au volume de jus que chaque tas pourra produire et au prix qu'on pourra en retirer... Ces activités de comparaison peuvent être accomplies avec des techniques relevant du monde sensible : on loge les pommes de chaque tas dans des caisses identiques, on place chacun des tas sur un plateau d'une balance de type Roberval, on presse les pommes de chaque tas et on recueille le jus dans des récipients identiques...

Dans chaque cas, on s'intéresse à une particularité des objets considérés, en faisant abstraction des autres, on ne se centre que sur une grandeur d'un type donné. Pour des particularités différentes on parle de grandeurs d'espèces différentes ou, dit autrement, de grandeurs de nature différente. Les manipulations que l'on accomplit pour comparer la « valeur » de cette particularité pour chacun des objets sont spécifiques de la particularité prise en compte, et s'effectuent dans le monde sensible : on compare les « valeurs » d'une grandeur d'une espèce donnée.

Citons quelques techniques pour comparer, dans le monde sensible, les valeurs d'une grandeur d'une espèce donnée pour deux objets :

- *Comparer deux quantités* : on peut mettre côte à côte les éléments de deux collections pour comparer les quantités d'éléments de celles-ci. Ceci suppose, entre autre, que la personne (l'enfant) qui se livre à l'expérience réussisse certaines des tâches piagétiennes de conservation des quantités (quand on déplace une collection, ou quand on modifie l'organisation de celle-ci, la quantité d'éléments qui la compose ne varie pas),

– *Comparer deux longueurs* : on peut superposer deux baguettes en les faisant coïncider à une extrémité pour comparer leur longueur. Remarquons que, faisant cela, on postule que la grandeur « longueur » attachée à l'objet est invariante lorsqu'on déplace l'objet,

– *Comparer deux masses* : on peut utiliser une balance à deux plateaux pour comparer les masses de deux objets. Ceci revient à admettre que la grandeur « masse », attachée à l'objet, ne varie pas lorsqu'on déplace l'objet (ce qui est faux en relativité restreinte pour un corps dans un référentiel donné se déplaçant à très grande vitesse relativement à un autre) ou tout au moins lorsque l'objet a été déplacé et se retrouve au repos,

– *Comparer deux aires* : on peut superposer, souvent après découpage, deux figures pour comparer leur aire. Cela présuppose aussi que la grandeur « aire », attachée à l'objet, est invariante lorsqu'on découpe l'objet et déplace les morceaux obtenus,

– *Comparer deux volumes* : on peut remplir un récipient de liquide et le transvaser dans un autre récipient pour comparer la contenance des deux récipients. Cela suppose peut-être encore que la personne ait au préalable réussi des tâches piagétiennes de conservation des quantités,

– *Comparer deux durées* : on peut utiliser un sablier pour comparer la durée de deux événements. Ceci revient à admettre que le temps s'écoule de la même manière en deux lieux distincts de l'espace (ce qui est plus complexe en relativité que ce que le sens commun nous porte à croire).

On voit donc que les techniques de comparaison des grandeurs de même espèce s'appuient souvent sur des implicites non questionnés. Leur validité sociale tient en leur efficacité et à leur précision… jusqu'à un certain point. Ce qui signifie que cet implicite se construit à travers la fréquentation sociale de nombreuses situations du même type, reproduisant des expériences équivalentes dont les résultats engagent les personnes à concevoir une certaine régularité des résultats obtenus sous des conditions données. Néanmoins, on parvient à définir en mathématiques et de manière axiomatique, la notion de grandeur d'une espèce donnée, et on peut munir l'ensemble des grandeurs d'une espèce donnée d'une structure algébrique. Nous n'explicitons pas la théorie mathématique assez délicate qui découle de cette axiomatique, nous donnerons simplement ci-dessous, un aperçu de la construction des « opérations »[33] correspondantes.

2.2 Dans l'enseignement élémentaire

En maternelle et au C.P., la quantité est la première grandeur que l'on rencontre. S'intéresser à la quantité d'éléments d'une collection (et bien avant de s'intéresser au « nombre d'éléments » de cette collection, donc à ce que l'on appellera plus tard son cardinal), nécessite, dans un premier temps, que l'on repère les particularités de cet objet « collection » pertinentes pour évaluer cette grandeur. Cela suppose, par exemple :

– que l'on soit en mesure d'identifier la collection comme un seul et même objet, constitué d'éléments, qui reste la même si on la déplace ou si on modifie son organisation, en particulier si on veut comparer deux collections ;
– que l'on néglige d'autres caractéristiques : la couleur, la forme, la taille, la place, ... des éléments qui la constituent.

C'est à travers de multiples tâches où la quantité d'éléments d'une collection est impliquée pour accomplir ces tâches, que l'on construit ce qu'on appelle la grandeur d'une collection.

[33] Les opérations écrites entre guillemets sont des opérations dans l'ensemble des grandeurs d'une même espèce, sans guillemets il s'agit d'opérations dans des ensembles de nombres.

On trouvera dans l'ouvrage « Le nombre à l'école maternelle » (Margolinas et Wozniak, 2012)[34] la description de situations d'apprentissage de la quantité. Il existe aussi des CD-Rom (Briand *et al.,* 2004)[35] présentant de telles situations, avec des commentaires pour les mettre en œuvre.

3. Objets ayant la même grandeur, pour une grandeur de type donné

Pour une grandeur d'une espèce donnée, il existe une multitude d'objets concrets qui sont équivalents au regard de cette grandeur : on imagine facilement qu'il existe des pommes ou d'autres fruits ou objets qui ont la même masse. Le passage des deux objets sur une balance à deux plateaux permet à la fois de signifier à quelle espèce de grandeur on s'intéresse, la masse, et de comparer leur « valeur » pour cette espèce de grandeur. Ce que nous nommons la « valeur » ou la grandeur pour une espèce de grandeur d'un objet n'est pas un nombre, c'est une notion abstraite qui correspond, en quelque sorte, à la famille de tous les objets qui sont équivalents à celui-ci pour cette espèce de grandeur. Cette famille ne peut pas être appréhendée de façon exhaustive. Elle sera repérée par sa mesure (quand une mesure de cette espèce de grandeur pourra être et sera définie), mais elle existe en dehors de sa mesure.

Des manipulations spécifiques permettent de repérer les objets ayant même valeur ou même grandeur pour le type de grandeur auquel on s'intéresse, (quelques exemples ont été évoqués précédemment « *Comparer deux...* ») ; ce sont des représentants de cette grandeur. Tous les objets équivalents pour une grandeur d'un type donné définissent une même grandeur pour ce type : une masse, une longueur, une quantité d'objets...
Quand on s'intéresse à la quantité d'éléments d'une collection, tous les ensembles pouvant être mis en correspondance terme à terme ont une même valeur pour cette grandeur, que l'on appellera leur cardinal, chacun d'entre eux est un représentant de ce cardinal.

II. LA MESURE DES GRANDEURS

La construction des grandeurs décrite précédemment, celle de leur mesure que nous allons maintenant aborder, ne tiennent pas compte d'un quelconque contexte scolaire. Les élèves, quel que soit leur niveau, ne sont pas vierges par rapport à ces sujets. C'est à l'occasion d'activités que l'on pourra observer où ils en sont sur ce thème, et expliciter les connaissances mises en jeu souvent de façon implicite. De plus les élèves doivent à la fois construire les différentes grandeurs, les nombres utiles à leurs mesures et les techniques de mesurage !!! Nous reviendrons plus loin sur ce problème.

On va passer ici du monde sensible au monde numérique

1. Grandeurs mesurables et les autres

1.1 Relation d'ordre sur les grandeurs d'une même espèce

On a rappelé précédemment qu'on peut comparer les grandeurs d'une espèce donnée attachées à deux objets en utilisant des techniques de comparaison directe ou faisant intervenir des objets intermédiaires relevant du « monde matériel » qui permettent d'agir sur des représentants de ces grandeurs :

- si on veut comparer les longueurs de deux tiges courbes on pourra faire coïncider une ficelle avec l'une de ces tiges et l'appliquer sur la seconde ;
- pour comparer l'aire de deux figures de formes très différentes on pourra découper deux figures identiques à chacune d'elles dans un carton épais et mettre chacun d'eux dans le plateau d'une balance ;

[34] MARGOLINAS C., WOZNIAK F., (2012), *Le nombre à l'école maternelle*, Bruxelles : Éditions De Boeck, chapitre 1, paragraphes 1 à 3, pages 11 à 36.
[35] BRIAND J., LOUBET M., SALIN M.-H. (2004), *Apprentissages mathématiques en maternelle*, CD-Rom, Hatier Pédagogie.

- pour comparer, en début et en fin de saison, les quantités de têtes d'un troupeau, on peut créer une collection de cailloux de même grandeur que le troupeau en début de saison : on met un caillou dans une boîte pour chaque bête rentrant dans un enclos, et sortir un caillou de la boîte pour chaque bête sortant en fin de saison.

La ficelle, les figures en carton, la collection de cailloux sont des objets intermédiaires, permettant de garder en mémoire au cours d'un déplacement dans le temps ou dans l'espace, la valeur de grandeurs auxquelles on s'intéresse. On définit ainsi, pour des grandeurs d'une espèce donnée, une relation d'ordre entre ces grandeurs à partir de leurs représentants, de manipulations sur ces représentants, et cela ne dépend pas des représentants choisis : si deux collections ont la même quantité d'éléments, si une troisième collection a plus d'éléments que l'une d'elle, elle aura aussi plus d'éléments que l'autre. C'est bien une relation d'ordre entre grandeurs d'une espèce donnée qu'on définit ainsi, relation d'ordre qui est totale (deux grandeurs d'une même espèce sont comparables).

1.2 Opérations dans l'ensemble des grandeurs d'une même espèce

Des techniques spécifiques à chaque espèce de grandeur peuvent aussi permettre de définir des « opérations » sur les grandeurs[36], d'« additionner », de « soustraire » voire de « multiplier par un entier » des grandeurs de cette espèce par le biais de leurs représentants :

- on peut « additionner » deux longueurs en mettant bout à bout un représentant de l'une d'elle et un représentant de l'autre, on obtient un représentant d'une longueur. Cette longueur ne dépend pas des deux représentants initialement choisis, elle sera appelée « somme » des longueurs...
- on peut « additionner » deux aires en mettant côte à côte un représentant de l'une d'elle et un représentant de l'autre, on obtient un représentant d'une aire qui, là aussi, ne dépend pas des deux représentants initialement choisis...
- on peut « additionner » deux quantités : en faisant la réunion de deux ensembles représentant chacun l'une d'elles, disjoints l'un de l'autre, on obtient un représentant d'une quantité qui ne dépend pas des deux représentants initialement choisis, appelé « somme » des deux quantités...

On imagine facilement, comment on pourra (par le biais de représentants que l'on manipule) « soustraire », « multiplier par un entier » (par réitération d'« addition » d'une même grandeur) des longueurs, des aires ou des quantités.

1.3 Grandeurs mesurables, grandeurs repérables

On définit ainsi dans l'ensemble des grandeurs d'une même espèce des « opérations », comme pour les nombres !!! Nous verrons un peu plus loin que cette possibilité permet aussi, après avoir choisi une unité, de faire correspondre à chaque grandeur d'une même espèce, un nombre qui sera sa mesure. Dans cette correspondance la « somme » des grandeurs sera une grandeur dont la mesure sera la somme (ici, somme de nombres), des mesures !!! La « soustraction » de deux grandeurs aura pour mesure la différence des mesures de ces grandeurs, de même pour le produit par un entier. Les grandeurs pour lesquelles la construction d'une telle correspondance numérique est possible sont dites des grandeurs mesurables.
Mais la démarche qui consiste à définir une « addition » (et donc une « soustraction ») et une « multiplication » par un entier, n'est pas possible pour toutes les grandeurs.
Par exemple, considérons la grandeur « température ». En repérant la dilatation d'une colonne d'alcool dans un thermomètre placé dans deux pièces différentes, il est évidemment possible de comparer la température des deux pièces, et donc de dire si elles sont à la même température ou si l'une est à une température inférieure à l'autre, la référence à un même objet se dilatant à la chaleur permet de repérer la température de tout élément où cet objet peut être immergé, et ces températures peuvent être comparées sans que cette comparaison soit affectée par le choix fait des représentants. Les valeurs correspondant à la température

[36] Comme nous l'avons dit plus haut, les opérations écrites entre guillemets sont des opérations dans l'ensemble des grandeurs d'une même espèce, sans guillemets il s'agit d'opérations dans des ensembles de nombres.

peuvent ainsi être totalement ordonnées. Néanmoins si on ajoute ou soustrait deux températures, si on multiplie une température par un nombre on ne sait pas à quoi correspond le résultat dans le monde sensible. Si on a deux liquides de température différente, quelle sera la température de leur mélange ? On ne connaît pas de technique permettant de définir la « somme » de deux températures indépendamment des représentants choisis.

On dit que la température est une grandeur repérable mais non mesurable. Il en est de même pour le temps (mais les durées, elles, sont mesurables), pour l'altitude (mais les dénivelés, eux, sont mesurables)...
Notons que les différentes valeurs des grandeurs d'un type donné, qu'elles soient mesurables ou repérables, sont ordonnées : il est toujours possible de décider, de façon plus ou moins objective, par des manipulations spécifiques du type de grandeurs envisagées, sur des représentants de chacune d'entre elles, si elles sont égales ou quelle est la plus grande et quelle est la plus petite.

L'organisation du monde matériel que nous venons d'évoquer précédemment − à savoir le repérage sur les éléments auxquels on s'intéresse de particularités permettant de définir leur valeur comme grandeur d'un type donné, possibilité de mobiliser des représentants de cette même valeur, possibilité de comparer cet élément à des représentants d'autres valeurs pour le même type de grandeurs, possibilité de l'« additionner » ou la « soustraire » (sous certaines conditions) à une autre valeur du même type, possibilité de « multiplier par un entier » − prépare une modélisation numérique des grandeurs. C'est cette modélisation que nous allons présenter dans le paragraphe suivant.

2. Mesure de grandeurs d'un type mesurable

2.1 De quoi s'agit-il ?

Comme nous l'avons expliqué précédemment pour des grandeurs mesurables d'un type donné, on peut définir des « opérations ».
Dans le document d'accompagnement des programmes « Ressources pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e, et 3^e du collège, Grandeurs et mesures au collège »[37], publié en octobre 2007 par le ministère de l'éducation nationale, on trouve une illustration de telles constructions pour les longueurs :
« Comparaison :
Elle se fait à l'aide de segments qui les représentent. Une longueur a est inférieure à une longueur b si leurs représentants [OA] et [OB] sur une même demi-droite d'origine O sont tels que A appartient à [OB].
Addition :
La somme des longueurs des segments [AB] et [CD] est celle du segment obtenu en mettant bout à bout deux segments respectivement équivalents à [AB] et [CD].

Une fois définie l'addition des longueurs, on peut définir la multiplication des longueurs par un entier (addition itérée), le produit de la longueur a par l'entier naturel n étant noté n a.

Le problème de la division d'une longueur par un entier non nul est également abordé à l'école primaire par l'emploi du réseau de parallèles équidistantes (ou guide-âne). »

Pour des grandeurs mesurables, la construction de la réponse à la question : « combien de fois un représentant d'une grandeur est-il contenu dans un autre de même espèce ? » nous introduit dans le monde numérique de la mesure des grandeurs. En effet : *mesurer une grandeur consiste à associer à cette grandeur un nombre exprimant un rapport entre cette grandeur et une grandeur de même espèce prise comme référence, celle-ci est l'unité de mesure ; c'est-à-dire un nombre tel qu'en « multipliant » cette grandeur de référence par ce nombre, on obtienne la grandeur en question.*

[37] Ce document peut être téléchargé sur le site de l'Éducation Nationale, sous le titre « Grandeurs et mesures au collège », http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/16/9/doc_acc_clg_grandeurs_109169.pdf.

Ainsi, dans le domaine des quantités, si je prends pour unité de mesure une collection {c} contenant un jeton, mesurer une collection C, c'est trouver le nombre par lequel il faut « multiplier » la collection {c} pour obtenir une collection de même quantité que la collection C (c'est-à-dire combien de collections à un élément il faudra réunir pour obtenir une collection ayant la même quantité d'éléments que C). C'est donc déterminer le nombre d'éléments de C !!! La mesure est ici toujours un entier.
La formulation adoptée « combien de fois », pourrait laisser penser que ce nombre est un entier, il n'en est rien.
On aura besoin des nombres décimaux : toujours dans le domaine des quantités, si je prends pour unité de mesure la collection {a, a, a, a, a, a, a, a, a, a}, la mesure de la collection {b, b, b, b, b, b, b, b, b, b, b} est obtenue en réunissant la collection de référence et une collection obtenue en « divisant » cette collection de référence par 10, elle sera 1,1.
On aura besoin des fractions non décimales : dans le domaine des longueurs, un guide-âne permet de « diviser » un segment S en 7 segments égaux, si je prends pour unité de mesure S, il faudra « multiplier » S par 1/7 pour obtenir un des petits segments. Mais l'ensemble des fractions ne suffit pas pour répondre à la question du produit d'une longueur par un nombre. On sait bien que pour les longueurs, par exemple, le rapport entre le diamètre d'un cercle et sa circonférence est le nombre irrationnel π ; c'est à dire un nombre qui ne peut s'écrire sous la forme du quotient de deux entiers !!!

2.2 Deux remarques fondamentales

Ce qui vient d'être exposé montre que, si la définition des différentes valeurs d'une grandeur d'un type donné ne relève que du monde physique, le recours aux nombres (munis de l'ordre et des quatre opérations) est incontournable pour définir une mesure et même pour définir certaines « opérations » dans l'ensemble de ces valeurs. L'intrication de ces trois notions – grandeurs, mesures, nombres – est une des principales difficultés pour introduire les nombres comme outil pour mesurer des grandeurs.

Cette introduction des nombres est extrêmement précieuse, elle permet d'élaborer des techniques numériques pour accomplir des tâches de comparaison de grandeurs ; les opérations sur les nombres permettent de prévoir la mesure de grandeurs obtenues par manipulations d'objets de mesures connues : réunion, partage... sans que les manipulations soient nécessaires, loin des objets auxquelles elles s'appliquent, et même sans que ces objets existent réellement. Le recours aux nombres pour la mesure des grandeurs, réalise une simplification des techniques permettant comparaison, « addition » et « produit » d'une grandeur par un nombre. Par cette opération de mesure, on passe de manipulations effectives dans le monde sensible à des manipulations dans le monde mathématique ou plus exactement numérique en attachant un nombre à une grandeur[38].

Ainsi, par exemple, on saura que si on commande 100 madeleines pour une classe de 23 élèves, il n'y en aura pas une pour chaque élève, chaque jour, durant une semaine de 5 jours, il faudra prévoir une commande plus importante si on veut donner une madeleine à chacun, chaque jour... Les nombres et les calculs sur les nombres permettent de prévoir en l'absence des objets avec lesquels on travaille.

---

[38] Notre texte présente très succinctement la construction des grandeurs puis de leur mesure en partant de manipulations dans le monde sensible et en supposant les nombres dont on a besoin disponibles... Pour une construction plus précise et plus rigoureuse d'une théorie des grandeurs et de leur articulation avec les nombres, on pourra se référer à un des documents cités ci-dessous, les éléments évoqués dans notre texte constituant néanmoins un début d'environnement technologique pour une telle construction :
« Ressources pour les classes de 6^{e}, 5^{e}, 4^{e}, et 3^{e} du collège, *Grandeurs et mesures au collège* » publié en octobre 2007 par le ministère de l'éducation nationale et précédemment cité.
CHEVALLARD Y., BOSCH M., (2000), Les grandeurs en mathématiques au collège, Partie I, Une Atlantide oubliée. *Petit x, n° 55*, pp. 5-32.
CHEVALLARD Y., BOSCH M., (2002), Les grandeurs en mathématiques au collège, Partie II, Mathématisations. *Petit x, n° 59*, pp. 43-76.
ROUCHE N., (2006), *Du quotidien aux mathématiques, nombres, grandeurs, proportions*, Éditions Ellipse.

Néanmoins, il faut garder présent à l'esprit qu'une grandeur ne se réduit pas à sa mesure, donc ne se réduit pas à un nombre ; ce que le recours aux nombres pour les mesures des grandeurs incite souvent à oublier[39].

III. LES NOMBRES ET LES GRANDEURS : QUELQUES CONSIDÉRATIONS DIDACTIQUES

Dans les paragraphes précédents, nous avons présenté les grandeurs et leurs mesures comme si la connaissance des nombres, et des opérations sur les nombres, les précédaient. D'un point de vue épistémologique tel n'est pas le cas et, à l'école élémentaire, on se servira des grandeurs et de leurs mesures pour construire les ensembles de nombres, et munir ces ensembles des structures utiles pour « calculer » sur les grandeurs. Les élèves vont à la fois construire les différentes grandeurs, les nombres utiles à leurs mesures et les techniques de mesurage !!! Les interactions entre ces différentes connaissances ne doivent pas faire oublier que les objets auxquels elles se rattachent ne sont pas de même nature et que la différenciation s'impose.

1. Construction de la quantité

Dès le début de la scolarité les enfants vont construire une grandeur particulière : la quantité attachée aux collections.
C'est à travers de multiples tâches impliquant la quantité d'éléments d'une collection, que l'on construit cette grandeur. Comme nous le disions plus haut, « les élèves, quel que soit leur niveau, ne sont pas vierges par rapport aux nombres et aux grandeurs ».
La construction de la quantité passe par de multiples activités conduisant à la comparaison directe de collections puis à la comparaison de collections à l'aide de collections intermédiaires[40].

La majeure partie des enfants connaissent une suite de mots-nombres, qu'ils ont appris souvent en dehors de l'école, énonçant avec quelques fois des oublis, des redites, les nombres à partir de un et pouvant aller très loin. Ils utiliseront la suite de mots-nombres comme collection intermédiaire pour comparer deux collections éloignées l'une de l'autre, pour construire, de façon différée, une collection ayant la même quantité d'objets qu'une collection qu'ils n'ont plus à leur disposition. Mais cela ne signifie pas que le dernier nombre énoncé est ce qu'on appellera le « nombre » d'éléments de la collection, son cardinal. La file numérique égrenée jusqu'à un certain nombre n'est qu'une collection transportable, qui peut voyager dans le temps et dans l'espace (au même titre que les doigts des deux mains ou qu'un croquis représentant, par des croix, les éléments de la collection sur laquelle on travaille), que l'on peut mettre en correspondance terme à terme (en pointant du doigt un élément tout en énonçant un nombre de la file) avec les collections auxquelles on s'intéresse.

Pour que ce mot puisse représenter la quantité d'éléments de la collection, il faudra que cette suite de mots-nombres soit invariable afin de rendre les comparaisons fiables[41]. Si, suivant les situations, l'ordre ou les mots énoncés ne sont pas les mêmes, le dernier mot énoncé ne correspondra pas à des collections de même valeur, elle ne sera pas un étalon fiable. Dans le cas contraire toutes les collections de même valeur pourront être mises en correspondance terme à terme avec les mots de la file numérique énoncée jusqu'au même mot, lequel pourra caractériser cette valeur.

---

[39] Ce que rappelle M-J. PERRIN-GLORIAN *in* « Actes de la XI^{e} école d'été de didactique des mathématiques » p. 303 : « *Cependant, pour l'apprentissage, il est important de considérer les grandeurs d'un point de vue non numérique.* »
[40] On peut se référer, pour une description d'activités visant l'apprentissage de la quantité, à l'ouvrage déjà cité : C. MARGOLINAS, F. WOZNIAK, (2012), *Le nombre à l'école maternelle,* Bruxelles, éd DE Boeck, chap. 1, paragraphes 1 à 3, p. 11 à 36, ou aux CD-Rom déjà mentionnés : *Apprentissages mathématiques en maternelle*, J. BRIAND, M. LOUBET, M.H. SALIN, CD-Rom, 2004, Hatier Pédagogie.
[41] Ibid. chapitre 1, paragraphe 4, pages 36 à 41.

2. Construction des nombres entiers naturels

Lorsqu'un élément de la file numérique est utilisé pour caractériser une quantité, il change de statut, il devient le nom d'une famille de collections, il devient le cardinal d'un quelconque représentant de cette quantité, il devient un entier naturel. Chaque nombre acquière une existence propre en dehors de son appartenance à la suite de mot-nombre, une fonctionnalité : il désigne une grandeur particulière, la quantité dont un représentant, en quelque sorte emblématique, est la collection des mots-nombre énoncés dans la file numérique jusqu'à lui. Dans l'expression « cette collection possède n éléments », n est le cardinal de la collection, c'est un élément de l'ensemble des cardinaux ou de l'ensemble des entiers naturels.

Il est certainement important de faire apparaître la différence de statut entre un nombre inséré dans la file numérique et ce même nombre cardinal d'une collection.

C'est en s'appuyant sur cette genèse que l'on va pouvoir munir l'ensemble des entiers naturels de structures algébriques (ordre et opérations).

3. Ordre dans les nombres entiers

La suite de mots-nombres, apprise comme une comptine, est ordonnée, et, à ce titre, va servir de support pour ordonner les nombres c'est à dire définir sur l'ensemble des nombres entiers une relation d'ordre totale[42]. L'assertion, le nombre n est plus petit que le nombre p, va se construire dans deux types de situations :

- quand une collection ayant n éléments a moins d'éléments que celle qui a p éléments, (par correspondance terme à terme), on dira que n est plus petit que p, (et cela ne dépend pas des collections à n et p éléments choisies). Ici le nombre est considéré comme la mémoire d'une quantité ;

- des *situations liées à la position*. Les nombres ne sont pas uniquement liés à la quantité mais aussi au repérage de la position d'un objet dans une collection rangée en ligne et, là encore, comme pour la construction de la quantité, on s'appuie sur la suite des mots-nombres pour construire la notion de position.

Dans une collection rangée en ligne (cela signifie qu'il y a un objet qui est « avant » tous les autres et qu'on peut parcourir la collection en allant, à partir de celui-ci de gauche à droite ou de haut en bas), si on s'intéresse à un objet particulier, le dernier mot-nombre énoncé quand on pointe l'objet désigné après avoir pointé tous ceux qui sont avant (en correspondance terme à terme avec la suite de mots-nombres), permet de garder en mémoire la position de cet objet. S'il désigne le cardinal de la collection qu'il constitue avec tous les objets qui sont avant lui, il désigne aussi la position de cet objet par rapport à un objet de départ, cet entier est alors un ordinal (remarquons que la relation entre le rôle cardinal et le rôle ordinal d'un même entier doit être étudiée). Nous intéressant surtout ici aux grandeurs et à leurs mesures, nous ne détaillerons pas plus la construction de la notion de position. On pourra se référer aux ouvrages déjà cités précédemment pour trouver des activités sur ce sujet[43]. Si l'objet situé en position n est avant l'objet situé en position p, si la collection des mots-nombres jusqu'à n a moins d'éléments que la collection des mots-nombres jusqu'à p, on dira que n est plus petit que p. Notons que cette façon de construire les entiers permet de parler de successeur d'un entier (le successeur de n n'est pas encore n+1 !).

---

[42] Une relation d'ordre totale dans un ensemble est une relation permettant de comparer deux éléments quelconques de cet ensemble, de décider quel est le plus grand et le plus petit des deux, en sachant que, si un élément est à la fois plus grand et plus petit qu'un autre, alors c'est qu'ils sont égaux, enfin telle que si un élément est plus petit qu'un autre, lui-même plus petit qu'un troisième alors le premier est plus petit que le troisième.

[43] On peut se référer, pour une description d'activités visant l'apprentissage de la position, à l'ouvrage déjà cité : C. MARGOLINAS, F. WOZNIAK, (2012), *Le nombre à l'école maternelle,* Bruxelles, éd DE Boeck, chap. 3, p. 59 à 74, ou aux CD-Rom déjà mentionnés : *Apprentissages mathématiques en maternelle*, J. BRIAND, M. LOUBET, M.-H. SALIN, CD-Rom, 2004, Hatier Pédagogie.

4. Opérations dans les nombres entiers

La construction de la mesure de la quantité commence implicitement lorsque la suite de mots-nombres, stabilisée, va être utilisée de la manière suivante pour déterminer la quantité d'éléments d'une collection : « un et encore un ça fait deux et encore un ça fait trois... ». Dans le « projet de programme et recommandations école maternelle » de 2014[44], on parle d'« itération de l'unité ». Les gestes qui accompagnent ce discours correspondent à des réunions successives d'un ensemble avec un ensemble à un élément, le discours, lui, peut être entendu comme des « additions » successives de collections à un élément. Une unité est choisie et on la reporte.

Pour permettre la mesure des quantités, les entiers naturels doivent être munis d'opérations.

4.1 L'addition dans les nombres entiers

L'addition dans les nombres entiers doit être une opération (au sens : à deux nombres on fait correspondre un troisième) cohérente avec la réunion des collections disjointes, (au sens : à deux nombres représentant deux quantités – donc cardinal de ces deux quantités – on fait correspondre un nombre qui représentera la « somme » de ces deux quantités). Pour la définir on « transporte » en quelque sorte la réunion de collections. C'est « ça » que l'on nomme addition dans notre société.
En général, pour débuter l'étude de l'addition de deux entiers, on introduit le signe + dans des locutions verbales, utilisant des nombres, et qui gardent en mémoire la quantité d'objets de collections obtenues par réunion de deux collections dont on connaît les cardinaux.

Dans un problème du type : « je sais que dans une section il y a 12 enfants dans l'autre il y a 15 enfants, si je veux réunir ces deux sections dans la salle de spectacle est-ce que j'aurai assez de chaises pour tous ? Il me faut 12 et encore 15 chaises, je vais noter ceci 12 + 15 pour m'en souvenir tant que je n'ai pas accès à la salle ». Cette expression représente un nombre entier, puisque c'est le cardinal de la collection obtenue par réunion des deux sections, mais ce n'est pas encore un nombre entier ! Cette locution verbale permet toutefois de résoudre le problème de place, dès qu'on est dans la salle et avant que les enfants arrivent !
Pour construire l'addition il faudra décider quel est le troisième entier que l'on fait correspondre à deux entiers n et p, et que l'on appellera somme de n et de p : ce sera naturellement le cardinal de la collection obtenue par réunion d'une collection de n et d'une collection à p éléments. Avec de petits nombres d'abord, des collections disjointes, respectivement à n et p éléments étant données, on détermine par dénombrement direct le nombre d'éléments de la réunion. On décide alors que la somme de n et de p, aussi notée n + p, est cet entier. À ce niveau, on ne pose pas le problème de savoir si le résultat est indépendant du choix des collections à n et p éléments choisies, mais c'est évidemment le cas !!!
Il est certainement important d'insister sur le fait qu'on construit ainsi une opération sur les nombres : à deux entiers n et p on fait correspondre l'entier qui est le nombre d'éléments de la réunion d'une collection à n éléments et d'une collection à p éléments.
On aurait pu construire l'addition en utilisant la genèse ordinale des entiers : je suis sur la case n et j'avance de p cases, on décide que la somme de n et de p, notée n + p, sera le numéro de la case où je me trouve.
Quel que soit le type de situation utilisée pour construire l'addition – réunion de collections ou déplacement sur une file – le lien avec l'autre définition doit être travaillé, afin que dénombrement de réunion de collections et déplacement sur la file numérique deviennent des techniques alternatives, équivalentes, pour déterminer la somme de deux entiers.

Très vite on peut remplir une table d'addition 9 + 9 en remarquant que n + p = p + n (issu de la propriété de la réunion) qu'ajouter 1 à un entier revient à prendre son successeur (propriété issue de la définition ordinale des entiers)...

---

[44] Site internet consulté le 01/09/2014 :
http://cache.media.education.gouv.fr/file/Organismes/32/4/CSP-_Projet_de_programme-recommandations_337324.pdf

Mais le dénombrement des collections, réunion de deux collections, ou de grands déplacements sur la file numérique, deviennent très vite difficiles et peu fiables. La poursuite de la construction de l'addition ou la conduite d'activités conduisant au dénombrement de grandes collections peut être l'occasion de travailler sur le système de numération qui est le nôtre. On sera amené à organiser les collections pour rendre fiable et simplifier le dénombrement et à s'appuyer sur les régularités de l'écriture chiffrée des nombres pour les grands déplacements sur la file numérique.

Les activités de dénombrement, que ce soit pour déterminer la quantité d'éléments d'une collection ou celle de la réunion de plusieurs collections, nécessitent une technique fiable d'énumération de ces éléments. On trouvera dans l'ouvrage « Le nombre à l'école maternelle » (Margolinas et Wozniak, 2012)[45] des activités pour enseigner l'énumération.

4.2 Les autres opérations dans les nombres entiers

La soustraction, la multiplication et la division, comme l'addition, seront introduites comme des opérations sur les entiers (au sens : à deux nombres on fait correspondre un troisième, ou deux autres) en cohérence avec des « opérations » sur les collections. Pour la soustraction, on s'appuiera sur la collection complémentaire d'une sous collection. Pour la multiplication, on s'appuiera sur la collection obtenue par réunion de collections identiques ou sur des collections rangées en lignes et colonnes régulières. Pour la division, on s'appuiera sur les collections obtenues par partage équitable d'une collection.
Les opérations sur les nombres entiers sont construites afin de modéliser dans le domaine numérique des « opérations » sur les collections. Elles permettent ainsi de prévoir le cardinal des collections que l'on obtiendrait si on effectuait ces "opérations" sans avoir à les faire.

IV. SYSTÈME DE NUMÉRATION

Nous l'avons vu précédemment, chaque nombre est un signe pour désigner une quantité. Les écritures utilisées pour désigner une quantité relèvent de conventions sociales, ils constituent des systèmes de numération. Ces signes sont écrits et oralisés pour faciliter la communication des informations qu'ils représentent, ils deviennent des mots. Les règles de formation d'un système de numération écrit et du système de numération orale qui lui correspond ne sont pas nécessairement les mêmes, ce qui n'est pas sans poser de problèmes didactiques. On y reviendra plus loin et on pourra se reporter, à ce sujet, à l'ouvrage « Le nombre à l'école maternelle »[46]. Nous nous centrons d'abord sur le système de numération écrit dont l'algorithme de construction permet de justifier l'algorithme de comparaison des grands nombres et les algorithmes des quatre opérations.

1. Définition. Quelques exemples

Un *système de numération* est constitué d'un ensemble S de symboles permettant d'écrire les entiers naturels sous forme de chaînes de ces symboles obéissant à des règles de constitution. Un système de numération sera d'autant plus intéressant que :

(a) le nombre de signes utilisés est faible,
(b) chaque nombre est représenté par une chaîne de symboles qui n'est pas trop longue (le nom des différentes quantités est court),
(c) il n'y a pas d'ambiguïté dans la désignation des nombres,
(d) les techniques élémentaires de calcul (pour comparer, additionner, soustraire, multiplier et diviser) sont économiques, puissantes et fiables.

[45] MARGOLINAS C., WOZNIAK F., (2012), *Le nombre à l'école maternelle,* Bruxelles, Éditions De Boeck, chap. 4, p. 75 à 96
[46] *Ibid*. chap. 5, p. 97 à 114.

Les systèmes de numération ont évolué au cours des siècles[47]. Avant d'arriver à notre système de numération, ils ont subi plusieurs améliorations :

– le système le plus simple consiste à associer le même signe à chaque élément, en correspondance terme à terme : IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII pour 43, on a ainsi une chaîne de symboles identiques, différente pour chaque nombre. Dans ce cas, le critère (b) n'est pas vérifié, ni évidemment le critère (d) ;

– un progrès important a été accompli lorsque les hommes ont créé des systèmes de numération additifs : après avoir organisé les chaînes précédentes par paquets réguliers (de 5, de 10, de 12…), on invente un nouveau signe représentant un paquet, et on peut réitérer le processus, en inventant à chaque fois un nouveau signe. C'est le cas de la numération égyptienne, où on regroupe par paquets de 10, mais on utilise un nouveau symbole à chaque changement d'unité : cela suppose un ensemble de signes potentiellement infini ! Dans ce cas, la satisfaction du critère (a) pose problème et, en dehors des additions et des soustractions, celle du critère (d) aussi ;

– une nouvelle amélioration a permis de réduire le nombre de signes, en modifiant la valeur d'un signe quand on modifie sa position, et en introduisant le zéro pour coder l'absence de signe dans une position. Dans une telle numération, le nombre de signes nécessaires correspond à la valeur des paquets réguliers que l'on souhaite considérer moins un (au dernier, on change de position) et plus un (pour le zéro) ; donc dans un système de numération de position de base a, il est nécessaire de disposer de a signes distincts. En système à base 10, il faut 10 signes pour écrire tous les nombres, quand on change d'unité on n'a pas besoin de nouveau symbole, il suffit de changer de position vers la gauche ; on peut ainsi écrire des nombres aussi grands que l'on veut.

2. Notre système de numération

Notre numération, appelée « *numération arabe* », ou « *système de numération de position à base 10* », est de ce type-là : nous travaillons avec des paquets de 10, donc nous utilisons 10 signes différents ; on parle de système numérique de position de base 10. Pour les critères (a), (b) et (c) ce système est performant. Pour le critère (d), les techniques de calcul mises en place sont économiques, puissantes et fiables, mais de ce point de vue l'usage d'une base qui serait un nombre premier permettrait une plus grande uniformité des algorithmes de calcul. Le recours à la base 10 a néanmoins un intérêt pratique : nous avons dix doigts aux deux mains et, pour les mesures, il est intéressant que la base choisie possède un grand nombre de diviseurs ; à ce titre 12 serait plus performant. En informatique, pour des raisons techniques, on utilise le système à base 2, dit « système binaire ».

L'écriture chiffrée des nombres que nous utilisons relève d'un algorithme, et donc fait apparaître des régularités, mais la lecture des nombres ne rend pas toujours audibles ces régularités. Comme nous l'avons dit précédemment si les enfants ont appris, en dehors de l'école, des listes de mots-nombres plus ou moins fiables, ils ne connaissent que très rarement l'écriture chiffrée des mots qu'ils utilisent, même s'ils rencontrent quotidiennement en dehors de l'école, de telles écritures. Si pour certains enfants les 20 premiers mots-nombres doivent être appris par répétitions fréquentes, à l'aide de comptines, d'exercices variés (on pourra voir à ce sujet « Le nombre à l'école maternelle »[48]) car on ne peut pas s'aider de régularités à l'oral, pour tous l'écriture chiffrée des nombres relève d'un apprentissage scolaire qui permettra d'en découvrir les règles. Pour la construction de la quantité, on recourt en général à l'apprentissage d'une liste de mots-nombres avec comme support visuel une file numérique sur laquelle figure l'écriture chiffrée des mots utilisés, ce matériel peut être utile comme collection intermédiaire dans les dénombrements, mais de plus les écritures chiffrées

[47] On pourra se référer à l'ouvrage de G. IFRAH, (1994), *Histoire universelle des chiffres. L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul*. Paris, Éditions Robert Lafont. Cet ouvrage relate en mille pages environ les différentes étapes de la genèse des nombres, qui s'étalent sur plusieurs millénaires.

[48] MARGOLINAS C., WOZNIAK F., (2012), *Le nombre à l'école maternelle,* Bruxelles, Éditions De Boeck, chap. 5, p. 102 et 103.

qui sont associées aux mots-nombres, porte la trace des règles de l'algorithme de notre numération et font apparaître des régularités.
C'est à l'occasion de dénombrements que l'attention peut être attirée sur ces régularités, en particulier en utilisant du matériel de représentation de la collection organisée en « paquets » : usage des doigts des deux mains, de dés, de matériel Diènes, de cartes à points, de boites de Picbille[49], de bouliers, de la pascaline. On va ainsi passer, en s'appuyant sur ce qui est écrit sur la file numérique, de 1 et encore 1 ça fait 2... à 5 et encore 5 ça fait 10 et encore 1 ça fait 11, ou à un paquet de 10 et encore un ça fait 11. En fait, avec chaque matériel utilisé, on mesure les quantités qui nous intéressent avec une unité spécifique au matériel : on mesure en doigts d'une main, en demi-boîtes de Picbille ou en constellations à cinq points, on mesure en paquets de 10 avec les barres Diènes, les boîtes de Picbille, les bouliers (à dix boules) ou la pascaline.
Dans ce deuxième cas, on apprendra que, quand on a la même quantité d'objets que de carrés sur une barre, que de boules sur une ligne de boulier (pleine), que de « clics » avec la roue de droite sur la pascaline ou que la boîte de Picbille est pleine, on écrira 10 (1 à gauche et 0 à droite), la quantité d'objets, ce qui signifie « 1 barre, une ligne, une boite... complète et rien d'autre, qu'on écrit 0 derrière ». Si on rajoute un objet, on aura toujours une barre, une ligne... complète et encore 1, on écrira 11 la quantité d'objets. Il est fondamental que les deux 1 apparaissent, en vertu de leur place, avec des valeurs différentes, ils mesurent des quantités avec deux unités différentes.
On débute ainsi la mise en place de l'algorithme de l'écriture chiffrée des nombres entiers, un outil fondamental pour dénombrer de grandes collections, incontournable pour calculer le nombre d'éléments de la réunion de deux collections...

3. Quelques remarques épistémologiques

On voit que le parcours décrit précédemment et qui n'est que le début de l'épopée des nombres à l'école, n'est pas linéaire. Il en est de même si on pense à l'histoire des nombres. G. Ifrah (1994)[50] parle d'une « *épopée de plusieurs millénaires* », nos chiffres, les chiffres dits arabes, seraient sans doute nés en Inde, il y a près de 15 siècles. Les avancées sont variables suivants les civilisations, elles n'émergent que si elles répondent à des demandes sociales après avoir été conçues par les savants : « *la logique n'est pas le fil conducteur de cette histoire* ».
Dans les lignes qui précédent nous avons commencé par la construction des grandeurs, parmi celles-ci, les quantités ont permis de définir ce que l'on appelle les nombres entiers naturels, ils ont émergé pour nommer les différentes valeurs des quantités, toujours dans une perspective de mémorisation ou de transmission.
Pour ces objets mathématiques, de nombreux modes de représentations ont été utilisés. On peut situer au IVe millénaire avant J.C. l'usage de représentations à l'aide d'objets en argile ayant des formes différentes suivant l'unité qu'ils représentent, cela dans un mélange de systèmes à base 10 et à base 60. L'apparition de l'écriture alphabétique du langage oral correspond à l'utilisation des lettres pour écrire les nombres, mais *« la découverte de la numération de position a échappé à la majorité des peuples de l'histoire »*. Une règle d'écriture de ce type n'est apparue que quatre fois : chez les savants de Babylone, au IIe millénaire avant notre ère, chez les mathématiciens chinois, peu avant le début de l'ère chrétienne, chez les astronomes mayas entre le IIIe et le Ve siècle après J.C. et enfin chez les mathématiciens indiens au Ve siècle. Seul ce dernier peuple envisagea le zéro comme un chiffre et cette numération nous fut transmise par les arabes. L'écriture chiffrée que nous utilisons est, d'une part décimale, ce qui conduit à mesurer les quantités avec des unités différentes, toutes puissances de 10 : 10, 100, 1000... d'autre part de position, ce qui permet de ne pas avoir à mobiliser un signe différent pour chaque puissance de 10, la position dans l'écriture chiffrée du nombre indique la puissance dont il est question. Il est important de faire apparaitre la capacité illimitée de notre représentation : « *en usant d'un nombre très réduit de chiffres de base celle-ci permet en effet, sans aucun artifice, une représentation simple et parfaitement rationnelle de n'importe quel nombre aussi grand soit-il* ». Il

---

[49] La boîte de Picbille est un matériel pédagogique associé aux manuels de mathématiques de la série « *J'apprends les maths avec Picbille* » de R. BRISSIAUD R., P. CLERC P. et R. OUZOULIAS, Éditions Retz.
[50] IFRAH G., (1994), *Histoire universelle des chiffres. L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul.* Paris, Éditions Robert Lafont. Toutes les citations qui suivent dans ce paragraphe sont extraites de cet ouvrage.

est aussi important de montrer « *la parfaite adaptation à la pratique, par écrit des opérations arithmétiques* », que d'autre système de numération rendent difficiles voire impossibles.

Chapitre XIII.
THÉORIE ET MODÈLE

Résumé

Ce texte a été rédigé pour une formation continue de professeurs d'école, visant un travail réflexif sur les pratiques enseignantes. Afin de motiver l'utilisation de la modélisation des pratiques dans une théorie didactique, pour évaluer et développer des séquences d'enseignement, nous avons fait un apport succinct sur le fonctionnement de l'activité scientifique. Le thème de la modélisation étant présent dans les programmes de l'école primaire, nous nous sommes appuyés sur des expériences familières d'enseignement pour montrer l'articulation entre : un domaine où on se questionne, sa modélisation par un effort d'abstraction dans une théorie et la production de réponses aux questions posées dans la théorie.
Dans le texte qui suit, on trouvera donc trois parties :
- une concernant la modélisation à l'école primaire et au collège : les programmes et des exemples d'activités de modélisation,
- une concernant l'articulation entre modèle et théorie dans l'activité scientifique,
- une concernant la modélisation des pratiques enseignantes dans une théorie, avec pour exemple la théorie anthropologique du didactique.

I. ACTIVITÉS DE MODÉLISATION À L'ÉCOLE PRIMAIRE

Dans les programmes de l'école élémentaire et du collège publiés en 2015 et mis en place en 2016, on trouve plusieurs fois le terme « *Modéliser* ».
Après avoir cité des extraits de programme, nous donnerons des exemples d'activités de modélisation familières aux enseignants des niveaux concernés.

1. Ce que disent les programmes

1.1 Programmes du cycle 2

Dans le texte des programmes du cycle 2[51], parmi les compétences attendues, on trouve :
« ***Modéliser***
Utiliser des outils mathématiques pour résoudre des problèmes concrets, notamment des problèmes portant sur des grandeurs et leurs mesures.
Réaliser que certains problèmes relèvent de situations additives, d'autres de situations multiplicatives, de partages ou de groupements. »

1.2 Programmes du cycle 3

Dans les programmes du cycle 3[52], parmi les compétences attendues, on trouve :

---

[51] MEN BO spécial N° 11 du 26 novembre 2015
[52] *ibid.*

« ***Modéliser***
Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne.
Reconnaitre et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité.
Reconnaitre des situations réelles pouvant être modélisées par des relations géométriques (alignement, parallélisme, perpendicularité, symétrie).
Utiliser des propriétés géométriques pour reconnaitre des objets. »

1.3 Ressources d'accompagnement des programmes de mathématiques en cycle 2 et 3

Dans les ressources d'accompagnement des programmes de mathématiques (Calcul aux cycles 2 et 3)[53], on trouve :
« ***Modéliser***
Lorsqu'il utilise les mathématiques pour résoudre des problèmes concrets, l'élève modélise. En effet, reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de partage, de groupements ou de proportionnalité relève de la modélisation. »

2. Un premier exemple de modélisation à l'école primaire

2.1 Un problème pour des élèves de cycle 2

Dans le coin jeu, les élèves ont une collection de poupées. L'un doit aller chercher des robes pour habiller toutes les poupées, l'autre des chapeaux pour chacune des poupées, un troisième des sacs... Tout ce matériel est distribué à la demande par un élève qui tient le vestiaire dans un autre coin de la classe.

Première solution envisageable
Chaque élève fait l'aller et le retour au vestiaire pour ramener un article et le mettre sur une poupée, ceci jusqu'à ce que toutes les poupées aient leur robe, leur chapeau et leur sac...

Deuxième solution envisageable
Chaque élève peut mesurer la quantité de poupées à habiller et demander au responsable du vestiaire une même quantité d'accessoires dont il est chargé.

Modélisation
Dans la première solution donnée au problème, les élèves restent dans le monde sensible. Dans la seconde, aux grandeurs avec lesquelles ils travaillent ils font correspondre leurs mesures (le nombre d'éléments des collections en jeu) et utilisent la définition même du cardinal pour assurer la fiabilité de leur stratégie.

L'opération qui consiste à faire correspondre à une grandeur sa mesure est une opération de modélisation du monde sensible dans la théorie des nombres. Dans cette théorie, on sait que tous les ensembles ayant le même cardinal sont en correspondance terme à terme, donc ont la même quantité d'éléments.

2.2 Un problème pour les élèves de cycle 3

Nous avons un tas de chocolats que nous devons mettre dans des boîtes avec des cases. Nous voudrions savoir s'il nous restera des chocolats quand nous aurons rempli toutes les boîtes que nous possédons ou s'il faudra acheter d'autres boîtes.

---

[53] eduscol.education.fr/ressources-2016 - Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche - Mars 2016, p. 4-5.

Première solution envisageable
Les élèves peuvent remplir les boîtes que nous possédons, voir s'il reste des chocolats, si oui aller chercher d'autres boîtes, les remplir, voir s'il reste encore des chocolats et ainsi de suite jusqu'à ce que la dernière boîte soit incomplète et rendre les boîtes non utilisées.

Deuxième solution envisageable
Les élèves peuvent mesurer les quantités en jeux : nombre de chocolats 1302, nombre de cases 3 rangées de 9 cases, nombre de boîtes initialement possédées 17. Ayant ainsi mesurer les quantités en jeux, ils peuvent, dans l'ensemble des nombres entiers, effectuer la multiplication de 3 par 9 soit 27, pour savoir combien il y a de cases dans chaque boîtes ; effectuer la multiplication de 17 par 27 soit 459, pour savoir combien nous utiliserons de chocolats pour remplir les boîtes en notre possession ; effectuer la soustraction 1302 - 459 qui me donnera le nombre de chocolats restants et la division euclidienne du résultat par 27 qui nous permettra de connaître le nombre de boîtes que nous devons nous procurer pour finir le travail.

Modélisation
Dans la première solution donnée au problème, les élèves restent dans le monde sensible, manipulent des objets matériels. Dans la seconde, aux grandeurs avec lesquelles ils travaillent ils font correspondre leurs mesures. Cette modélisation dans la théorie des nombres étant faite, ils peuvent utiliser les opérations construites sur les entiers naturels et qui correspondent à des manipulations dans le monde sensible. Étant donné deux nombres n et p, la multiplication n x p permet d'obtenir le cardinal d'une collection rangée en n lignes et p colonnes ; la soustraction n – p permet de connaître le nombre d'éléments qu'il reste dans un ensemble à n éléments lorsqu'on a enlevé p éléments ; la division euclidienne de n par p permet de connaître le nombre maximal de tas à p éléments que l'on peut faire avec n éléments et ce qu'il reste après ce partage.
Dans la seconde solution, le problème a été modélisé dans la théorie des nombres et les opérations construites dans l'ensemble des entiers naturels permettent de prévoir la réponse à la question posée, en dehors de toute manipulation dans le monde sensible.

II. MODÈLE – THÉORIE – ACTIVITÉ SCIENTIFIQUE

Nous allons nous appuyer sur les exemples précédents pour évoquer l'articulation modèle – théorie dans l'activité scientifique.

1. Modèle

Un modèle est toujours une construction humaine élaborée pour produire des connaissances dans des domaines précis. En mathématique, on parle de modèle numérique pour répondre à des questions portant sur des grandeurs, et de modèle géométrique pour répondre à des questions portant sur les positions relatives, les formes, les volumes... Il existe des modèles non mathématiques, appelés modèles analogiques, représentants sous forme réelle, réduite et simplifiée, un objet ou un processus, (maquette d'un édifice, représentation graphique d'un phénomène géologique...). Dans les modèles mathématiques ou analogiques, les objets matériels sur lesquels on se pose des questions ont leur « représentation » dans le modèle : dans l'exemple précédent, le tas de chocolats est représenté par le nombre mesurant la quantité de chocolats, chaque boîte par le nombre mesurant la quantité de cases contenues dans chacune d'entre elle, l'ensemble des boîtes possédées par la mesure de la quantité de boîtes. Un modèle est toujours peuplé d'objets de nature différente de celle des objets représentés :

- objets abstraits, pour des modèles mathématiques (certes un nombre n peut s'écrire, pour savoir ce dont on parle, mais en fait il est le nom, le représentant d'une entité abstraite : la classe de tous les ensembles qui peuvent être mis en correspondance terme à terme avec la suite 1, 2, ..., n) ;
- objets concrets, pour les modèles analogiques, mais de dimensions et de matières différentes de celles des objets réels qu'ils représentent.

Toutefois ce sont des objets dont on peut étudier les propriétés, les interrelations (ordre, opérations..., simulation de mouvements, de déformation...), car un modèle est toujours construit dans un domaine où on

possède des connaissances, dans le cadre d'une théorie (théorie des ensembles, géométrie euclidienne) ou dans une réalité observable et manipulable, dont on connaît les règles de comportement.
Un travail de modélisation suppose toujours un travail d'abstraction : «l'oubli» de nombreuses caractéristiques du réel sur lequel on travaille pour ne garder que les propriétés jugées pertinentes au regard du problème à résoudre (peu importe qu'il s'agisse de chocolats ou de madeleines, que les boîtes soient carrées ou rectangulaires, ce qui est à prendre en compte ce sont les grandeurs en jeu, peu importe que l'édifice représenté soit en bois ou en ciment ce qui est, par exemple, pris en compte c'est la position relative des différents corps de bâtiments ou l'inclinaison du toit, ou d'autres détails de la construction).

2. Théorie

Nous avons dit précédemment qu'un modèle est construit à l'intérieur d'une théorie qui assure la production de connaissances sur les objets du modèle et par voie de conséquence sur les objets représentés.
Une théorie c'est un ensemble d'assertions reconnues comme vraies, par démonstration à partir de quelques assertions admises (les axiomes de la théorie) et qui permettent d'assurer l'existence des objets abstraits dont on a besoin pour « représenter » les objets matériels sur lesquels on s'interroge et les interrelations entre ces objets.
Pour les modèles numériques, la théorie dans laquelle on travaille est la théorie des nombres, à l'intérieur de laquelle on construit les nombres entiers, les rationnels, les nombres irrationnels, la relation d'ordre sur les nombres, les quatre opérations entre ces nombres, et bien d'autres objets pouvant représenter des grandeurs mesurables de toutes natures et permettre des calculs sur celles-ci. Pour la géométrie, la théorie est la géométrie euclidienne, à l'intérieur de laquelle on prouve l'existence de points, de droites et on peut étudier les propriétés relatives de ces objets (parallélisme, orthogonalité, propriétés des figures, étude des transformations...) qui sont des objets abstraits, n'existant que par leurs propriétés, mais pouvant « représenter » la trace laisser sur une feuille de papier par la pointe d'un crayon, l'arête d'un solide, le bord d'une table... Les modèles analogiques sont en général astreints aux lois de la physique.
Il existe des théories autres que les mathématiques pour modéliser d'autres réalités, nous en donnerons un exemple dans le dernier paragraphe de ce document.

3. Activité scientifique

L'activité scientifique contribue à produire des théories et, dans le cadre de ces théories, des modèles pour tenter de répondre aux questions que l'on se pose sur le monde qui nous entoure, à modéliser les situations problématiques, à faire fonctionner le modèle pour produire des réponses dans le cadre de la théorie choisie... enfin à confronter les réponses à la réalité afin de valider ou non les choix théoriques faits, ces différentes étapes interférant les unes sur les autres.
La modélisation, c'est à dire le choix de représenter dans tel modèle théorique tel objet matériel, relève en général de la collaboration entre le spécialiste du domaine où on se pose une question et le spécialiste de la théorie dont on veut se servir. C'est le spécialiste du domaine qui dira qu'on peut « oublier » telles ou telles caractéristiques, que le modèle choisi doit tenir compte de tel paramètre lié par telle relation avec tel autre... Tout cela relève de choix, qui, étant clairement repérés, peuvent être validés ou invalidés a postériori, par confrontation avec la réalité. Les théories et les modèles utilisés par les scientifiques évoluent car certaines des connaissances produites dans les modèles utilisés sont en contradiction avec des faits observés ou ne rendent pas compte de certains faits observés : il est alors nécessaire de s'interroger sur les choix fait pour modéliser, voire sur la théorie elle-même. Ni le modèle, ni la théorie ne donnent de critères de leur validité pour justifier leur usage dans le travail de modélisation engagé.

III. ACTIVITÉ DE MODÉLISATION DANS LA PRATIQUE ENSEIGNANTE

1. Motivation de la modélisation de la pratique enseignante

Lorsqu'il doit débuter un nouvel apprentissage, un enseignant a à sa disposition éventuellement les traces de ce qu'il a déjà fait les années précédentes, des descriptions de séquences trouvées dans des manuels scolaires, des livres du maître, des ouvrages pédagogiques. Tout ceci constitue une quantité importante de mises en scène possibles à partir desquelles il doit faire des choix. Pour ce faire, il doit être en mesure d'analyser les différentes progressions à sa disposition afin de les évaluer, et éventuellement les développer. Le travail d'analyse va l'amener à sélectionner dans une multitude d'informations, des éléments qui lui paraissent pertinents au regard de son projet. Ces informations relèvent de domaines variés et nombreux : les savoirs disciplinaires, le comportement des élèves et celui de l'enseignant, les données concernant l'environnement social... Il s'agit d'analyser un système complexe et d'organiser une prise d'informations sur ce système. Il est alors indispensable de préciser le questionnement dans lequel on se situe, et de se placer dans un cadre théorique pertinent pour produire des connaissances relatives à la problématique poursuivie. Un novice découvrant un cliché de l'IRM d'un genou y verra des zones plus ou moins sombres, lui évoquant sans doute une articulation entre deux os, mais le radiologue ou l'orthopédiste commentera ces images, en langage technique, décrira les caractéristiques significatives de ces zones d'ombre, lui permettant, par exemple, de faire un diagnostic d'altération de tel ou tel cartilage, voire d'en préciser l'étiologie. Pour ce faire, le spécialiste s'appuie sur un savoir théorique lui permettant de sélectionner, dans toutes les informations qu'il a sous les yeux, celles qui lui permettent de pointer les anomalies « orthopédiques » susceptibles d'expliquer les douleurs du patient. C'est un travail de modélisation dans le cadre d'une théorie au sens évoqué plus haut.

2. Un exemple de théorie pour la modélisation de la pratique enseignante

Pour l'enseignant, plusieurs théories peuvent être utilisées, du champ de la sociologie, de la psychologie, et de bien d'autres domaines. À titre d'exemple, la théorie que nous évoquons ci-dessous permet de modéliser la didactique des activités humaines, c'est à dire d'étudier leur transmission et leur diffusion, et plus particulièrement des activités mathématiques : il s'agit de la Théorie Anthropologique du Didactique (T.A.D.) (Chevallard, 1999)[54].
Dans le cadre de la T. A. D., on sélectionnera dans une progression les éléments permettant de décrire les activités ou l'activité (mathématiques pour ce qui nous concerne), dont l'apprentissage est visé, ainsi que la façon dont l'apprentissage est conduit.

2.1 Description de l'activité mathématique dont l'apprentissage est visé

En T. A. D. une activité humaine est décrite en quatre composantes :
- type de tâche
- technique
- technologie
- théorie.

Plus précisément, en déclinant le discours dans le domaine qui nous concerne ici, un nouvel apprentissage mathématique vise un *savoir-faire* : en fin d'apprentissage l'élève doit savoir accomplir un certain type tâche avec une certaine technique. Ce savoir-faire s'accompagne d'un *savoir* sur le type de tâche : la technologie, c'est à dire un discours sur la technique permettant de la décrire et la justifier, et la théorie qui se réfère à un champ théorique de savoir (théorie des nombres, géométrie euclidienne) où la technique choisie est légitime. L'ensemble constitué par le savoir-faire et le savoir qui lui est attaché forme ce que nous nommerons une *organisation mathématique.*

Ayant pointé, dans la séquence analysée, les éléments permettant de définir l'organisation mathématique étudiée, on peut se poser plusieurs questions :
- le type de tâches entraîné est-il conforme à ce qui est attendu au niveau concerné ?
- la technique attendue pour accomplir ce type de tâches est-elle adaptée à celles-ci et aux instructions officielles ?

[54] CHEVALLARD Y., (1999). "Analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique", *Recherches en didactique des mathématiques,* volume 19/2, Grenoble, Éditions La Pensée Sauvage.

- le discours technologique tenu, permet-il de décrire et de justifier la technique, pour le public concerné ?

2.2 Description de la façon de conduire l'apprentissage d'une organisation didactique

En relation avec la description donnée précédemment d'une organisation mathématique, la T.A.D. postule que, dans une séquence visant l'apprentissage du savoir-faire et du savoir correspondant, on peut repérer différents moments et différentes activités dont la fonctionnalité peut être décrite de la façon suivante :

- moment de *première rencontre* : c'est le moment où on rencontre pour la première fois l'organisation mathématique enjeu de l'étude,
- moments *d'exploration du type de tâches* et d'*élaboration de la technique* : ce sont des moments où s'élabore la technique souvent pour accomplir des problèmes d'un même type,
- moment de *constitution de l'environnement technologique et de l'environnement théorique* : ce sont tous les moments où la technique sera explicitée et justifiée,
- moment du *travail de la technique* : ce sont des moments où on améliore la technique pour la rendre plus efficace et plus fiable et où on accroit la maîtrise que l'on en a,
- moment de l'*institutionnalisation* : moment où on précise exactement l'organisation mathématique élaborée,
- moment de l'*évaluation* : moment où on fait le point sur ce qui a été appris.

Comme précédemment, ayant pointé dans la séquence analysée les éléments qui relèvent de chacun des moments, on peut se poser de nombreuses questions, par exemple :

- tous les moments sont-ils présents ? Si certains « gestes d'étude » ne sont pas présents, pourquoi cette absence et quelle incidence a-t-elle ?
- comment sont réalisées les activités relevant de chaque moment ? En particulier qu'est-ce qui est à la charge de l'élève, et à la charge de l'enseignant ?

ANNEXES

Annexe I. SE PROCURER DES PASCALINES



Les pascalines utilisées dans cette brochure sont fabriquées et commercialisées par la société italienne Quercetti : http://www.quercettistore.com/en/toys/xxl-assortment/2361-zero1-scuola

La société ARPME les distribue en France (en janvier 2018) sur son site Internet : http://arpeme.fr/documents/BON_COMMANDE_PASCALINES.pdf

La e-pascaline, version informatisée de la pascaline, est diffusée gratuitement par l'Institut Français de l'Education et une version pour tablettes sous système androïd est en préparation début 2018 : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees-13-14/mallette/prototype-mallette

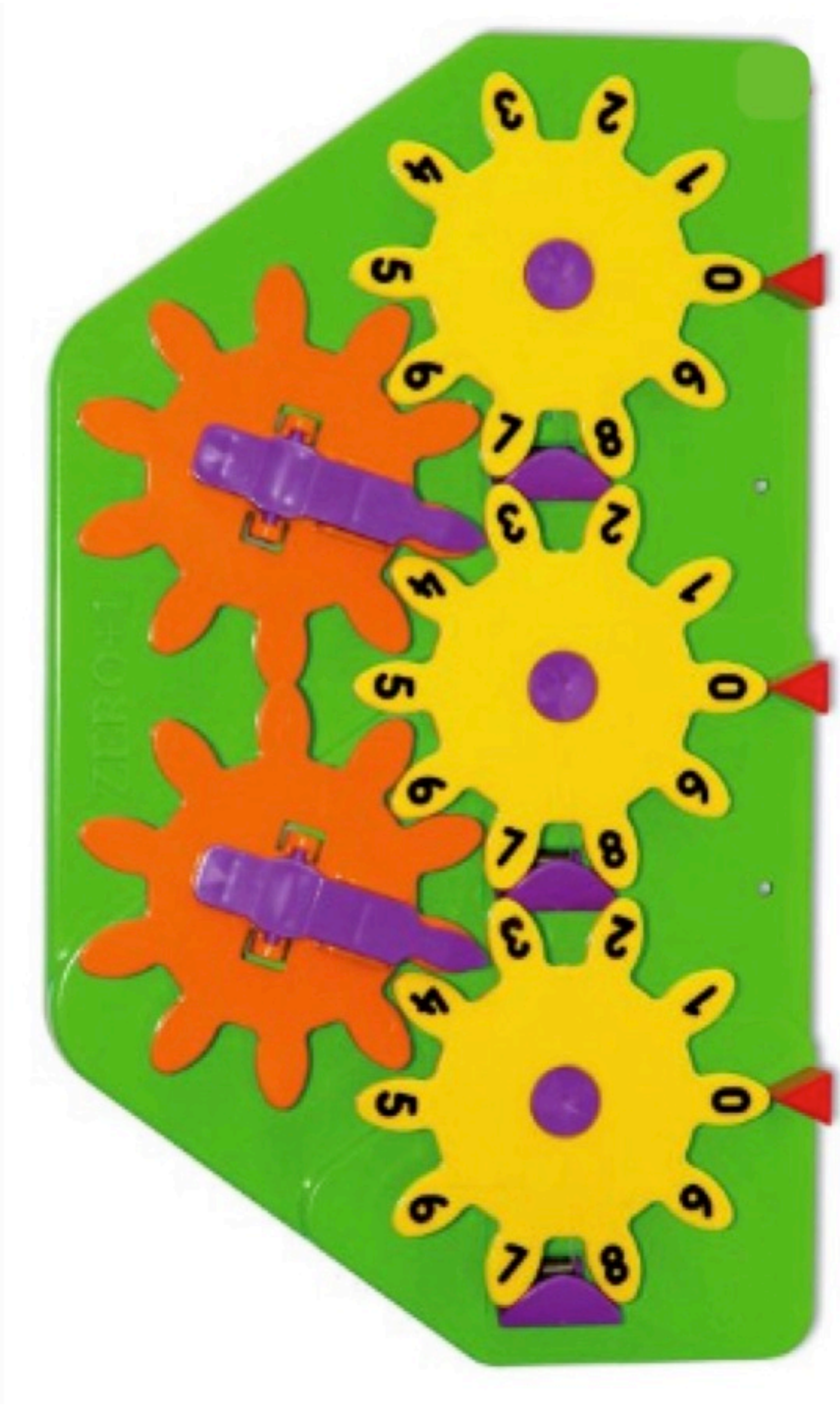
Il est à noter que dans le cadre des expérimentations conduites en classe, le matériel a pu générer des incidents que nous recensons ici de façon à ce que l'enseignant puisse réagir rapidement :

- les chiffres s'effacent assez rapidement, il est donc recommandé de demander aux élèves de tourner les roues en plaçant le doigt entre les dents, ce qui est également le bon geste pour incrémenter la pascaline unité par unité ;
- les ressorts sautent assez facilement, il s'agit d'inviter les élèves à être vigilants pour éviter de les perdre ;
- certains élèves peuvent forcer sur une roue orange pour la faire passer sous une roue jaune. Dans ce cas, malgré des manipulations convenables, le résultat affiché n'est pas le bon. La pascaline peut être réparée en comparaison avec une pascaline non déréglée ;
- le ressort caché sous les flèches violettes peut se détendre, les flèches n'entraînent plus les roues, la pascaline est alors réparable en se procurant des ressorts de rechange auprès de la société Quercetti.

Pour toutes ces raisons, il est utile de disposer de quelques pascalines de secours à mettre à disposition des élèves. Il serait également souhaitable que le matériel puisse évoluer vers une version plus robuste.

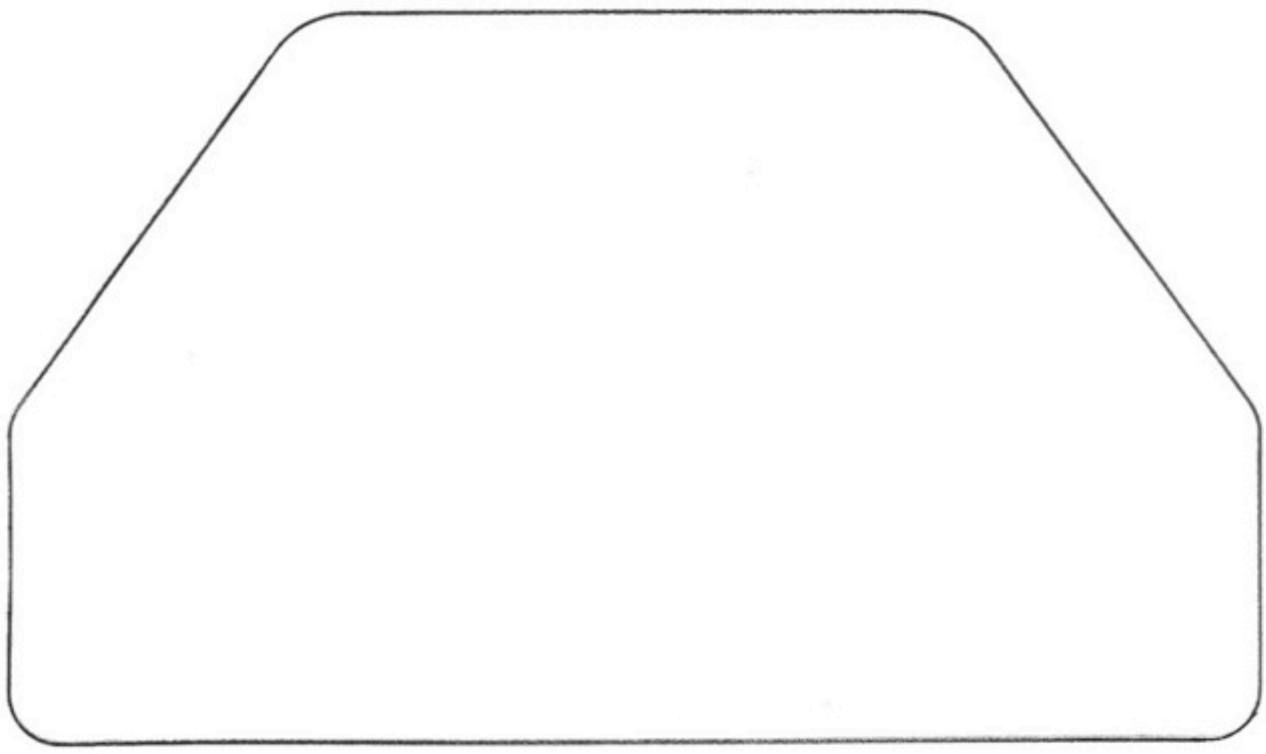
Enfin, pour les travaux menés dans cette brochure, les virgules ne sont pas utiles. Elles peuvent être enlevées.

Annexe II. IMAGE DE LA PASCALINE À IMPRIMER



Annexe III.
SCHÉMA DE DÉPART POUR LE DESSIN PAR LES ÉLÈVES

Lorsque les élèves doivent dessiner la pascaline, il est préférable de leur fournir un cadre imprimé sur un format pas trop grand, tel qu'une feuille A5. Le modèle présenté ci-dessous est extrait du site « Plan sciences en Côte d'Or » http://ife.ens-lyon.fr/sciences21/ressources/sequences-et-outils/pascaline-CP, qui regroupe une proposition de séquence pour l'apprentissage des nombres et du calcul avec la pascaline et la e-pascaline.

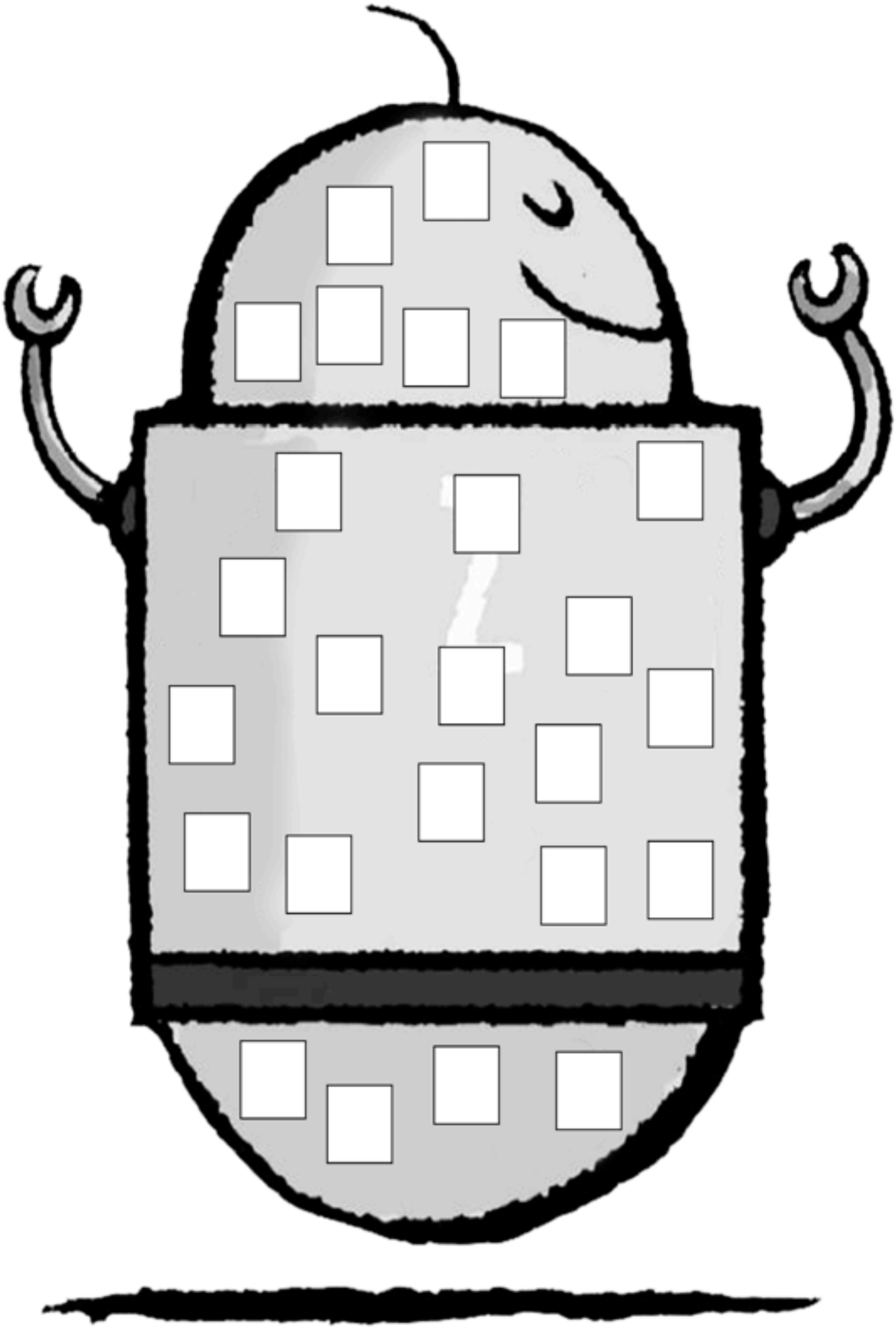


Annexe IV. ETIQUETTES À IMPRIMER

roues orange
roues jaunes
chiffres
nombres
flèches
repères triangulaires
virgule
dents
clics
taquets

Annexe V. ZIGLOTRON À COMPLÉTER

Le Ziglotron est à photocopier, avec l'aimable autorisation de Hatier, éditeur du manuel Cap Maths CP 2016. Il appartient à chaque enseignant de déterminer le nombre de boutons manquants à aller commander chez le marchand : les cases noircies représentent les boutons présents, les cases blanches représentent les boutons manquants.



UCA Université Clermont Auvergne

IREM Clermont-Ferrand

Maison pour la science au service des professeurs en Auvergne