CORRIGE DE L'EPREUVE DU RALLYE MATHEMATIQUES D'AUVERGNE EDITION 2017

Exercice n°1 : Nous proposons deux méthodes différentes pour cet exercice, une utilisant le tableur qui serait plus à la portée d'une classe de 3ème et une autre avec un algorithme qui serait davantage utilisée par une classe de 2nde.

Première méthode : avec un tableur

	A	B	C	D	E	F	G
1				gazelles	tigres	serpents	
2	après	10	jours	1	0	0	
3	après	9	jours	1	0	1	
4	après	8	jours	2	1	2	
5	après	7	jours	5	3	4	
6	après	6	jours	12	7	9	
7	après	5	jours	28	16	21	
8	après	4	jours	65	37	49	
9	après	3	jours	151	86	114	
10	après	2	jours	351	200	265	
11	après	1	jour	816	465	616	
12		**Au départ**		**1897**	**1081**	**1432**	
13							
14							

Dans D2, E2, F2 on écrit 1, 0 et 0 ; cela correspond à l'unique gazelle restante après 10 jours.
Pour D3, E3, F3, on rentre les formules suivantes :

- D3=D2+E2+F2
- E3=E2+F2
- F3=F2+D2

Puis on étire ces formules jusqu'à la douxième ligne du tableur pour obtenir le résultat souhaité.

Deuxième méthode : avec un algorithme

Entrées
Saisir n, G, T, S
Traitement
n reçoit 10, G reçoit 1, T reçoit 0, S reçoit 0
Pour i allant de n-1 à 0
    P reçoit G
    Q reçoit T
    R reçoit S
    G reçoit P + Q + R
    T reçoit Q + R
    S reçoit P + R
Fin pour
Sorties
Afficher G, T, S

Exercice n°2 :

Avec 4 lettres et 6 chiffres, on ne peut pas répartir équitablement le code dans les trois morceaux.

Étudions des répartitions possibles, en répartissant d'abord les lettres :

répartition de chaque morceau :	3 lettres	3 chiffres	3 chiffres 1 lettre
nombre de possibilités :	$26^3 = 17\,576$	$10^3 = 1\,000$	$10^3 \times 26 = 26\,000$

Si l'on met 4 lettres dans un morceau, c'est encore moins équilibré.

Essayons avec 2 lettres :

répartition de chaque morceau :	2 lettres	1 lettre	1 lettre
nombre de possibilités :	$26^2 = 676$	26	26

À chaque chiffre ajouté, on multiplie les possibilités par 10. Pour obtenir la meilleure répartition possible, on doit avoir : 6 760 ; 2 600 et 26 000, ce qui correspond à 2 lettres 1 chiffre, 1 lettre 2 chiffres, 1 lettre 3 chiffres.

Autre possibilité :

répartition de chaque morceau :	2 lettres	2 lettres	0 lettre
nombre de possibilités :	$26^2 = 676$	676	1

En ajoutant les chiffres, la meilleure répartition est : 6 760 ; 6 760 et 10 000, ce qui correspond à 2 lettres 1 chiffre, 2 lettres 1 chiffre et 4 chiffres.

C'est cette solution qui répartit le plus équitablement les possibilités.

Exercice n°3 :

Une page a pour dimensions 21 x 29,7 (en cm, et arrondi).
Si on enroule sur la longueur, la circonférence de la base sera 29,7 cm, et la hauteur 21 cm.
Donc le rayon de la base sera $\frac{29,7}{2\pi} \approx 4,3$, et le volume du cylindre sera environ égal à 1474 cm² cm².
Si on enroule sur la largeur, la circonférence de la base sera 21 cm, et la hauteur environ 29,7 cm.
Donc le rayon de la base sera $\frac{21}{2\pi} \approx 3,34$, et le volume du cylindre sera environ 1042 cm². Donc le volume est plus grand si on enroule sur la longueur.

Exercice n°4 :

1°) Il y deux menteurs parmi les lutins, et un lutin qui dit la vérité. Comme deux lutins portent la même affirmation, c'est automatiquement que celle-ci est fausse. Le lutin qui garde la boite A dit donc la vérité. Le costume est donc dans la boite A.

2°) Ici les deux lutins se renvoient le nœud papillon... Si l'un d'entre eux disait la vérité, il ne pourrait pas dire que le nœud papillon se trouve dans une autre boite ! Les lutins gardant les boites B et C sont donc des menteurs, et le nœud est dans la boite C.

3°) Imaginons que par un tour de passe-passe on échange les boites vides avec les boites pleines. Ce qui était vrai avant, devient faux, ce qui était faux devient vrai. Il y a toujours deux lutins qui mentent ; et qui sont ceux gardant les boites maintenant vides, et deux lutins qui disent vrai ; et ce sont maintenant encore ceux gardant les boites pleines. Donc, en ayant juste les affirmations des quatre différents lutins, le Père Noël ne pourra jamais distinguer entre les positions des bottes avant ou après le tour de passe-passe. Il a donc raison de s'insurger contre ce problème insoluble.

4°) Commençons par donner une réponse détaillée, avant d'exposer une solution plus synthétique.
Si A possède la clé, on trouve bien que les rennes B et C sont menteurs.

Si B possède la clé, alors il devrait dire la vérité, ce qui n'est pas le cas, car A ne dirait certainement pas que la clé est dans B !
Si C possède la clé, alors B doit être un menteur ; donc A ne pourrait pas nous dire que B a la clé. Mais comme A est un menteur, il pourrait tout à fait nous dire dans ce cas-là que B a la clé. Si C possède la clé, l'affirmation de B est véridique, ce qui est contradictoire avec l'énoncé.
La manière la plus synthétique de répondre à cette question consiste en une utilisation de la règle des signes : les deux premières affirmations portent sur la proposition « B a la clé » ; la troisième sur l'affirmation « A a la clé ». Deux lutins menteurs, un lutin véridique, donc sur les paires de lutins, cela nous fait encore deux paires menteuses (celles comprenant un menteur et un véridique), une paire véridique (celle comprenant les deux menteurs). Les paires A-C et B-A portent la même affirmation : « B a la clé ». Celle-ci ne peut donc être que fausse. Par suite, c'est A qui dit la vérité, B et C sont menteurs. Mais la paire B-C dit la vérité : c'est donc effectivement A qui a la clé.

Exercice n°5 :

1°) On note d le nombre de noisettes que le candidat a mis dans sa main droite et g celui de la main gauche. On sait que $d + g = 9$.

Le candidat ayant pour chiffre porte bonheur le 7, on a alors $7d + 6g = 60$

Or : $7d + 6g + g = 7d + 7g$
$$= 7(d + g)$$
$$= 7 \times 9$$
$$= 63$$

D'où : $60 + g = 63$ et ainsi $g = 3$ Le nombre de noisettes que le candidat a mis dans sa main gauche est 3 et on en déduit que celui dans sa main droite est 6.

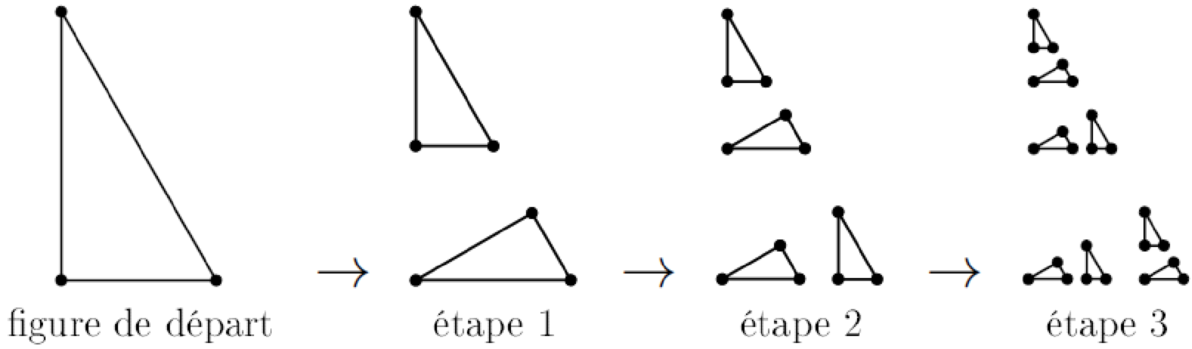
2°) Si le candidat a pour chiffre porte bonheur 5 et annonce qu'il obtient 37, comme $9 \times 5 = 45$ et que $45 - 37 = 8$, c'est donc qu'il a 8 noisettes dans sa main gauche et une dans sa main droite.

Exercice n°6 :

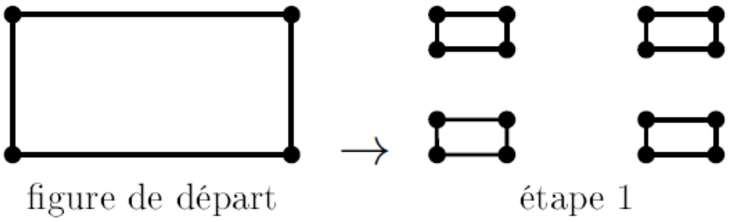
A l'aide de l'outil « polygone régulier » on construit le carré ABCD puis le triangle équilatéral AED.
On trace la droite (BE) qui coupe le côté [DE] du carré en F, puis on complète le triangle équilatéral BFG.
Le cercle inscrit dans un triangle a son centre à l'intersection des bissectrices. On peut donc trouver les points J et K en traçant deux bissectrices de chacun des triangles DGH et AIB.
La perpendiculaire à (DA) issue de J donne le point R, et JR est le rayon du grand cercle. De même la perpendiculaire à (AB) issue de K donne le point S, et KS est le rayon du petit cercle.

En affichant les longueurs JR et KS, on constate que JR=2KS.

Exercice n°7 :
1°)



2°)



<u>Exercice n°8 :</u>

Le centre E du cercle C_1 est situé sur la perpendiculaire à D passant par A, le centre F
Du cercle C_2 est situé sur la perpendiculaire à D passant par B ;
Comme les deux cercles sont tangents, EF est égal à la somme des deux rayons, donc à FB+EA.
Soit K le point de la droite (FD) tel que FK=FB+EA, qui s'obtient en reportant le rayon EA à partir de B sur la droite (FB).
Le centre F du cercle C_2 est alors équidistant des points E et K. Il appartient donc à la médiatrice du segment [EK].
Comme il est sur la perpendiculaire à D passant par B, le point F est à l'intersection de ces deux droites si elles ne sont pas parallèles.

Si elles sont parallèles, cela signifie que (EK) et (FK) sont confondues, donc que A et B sont confondus.
La construction précédente trace pour C_2 le cercle de centre B(=A) et de rayon nul.
Par contre dans ce cas particulier, tout cercle de centre F sur la droite (EA) et tangent à la droite D en B (=A) convient. Les deux cercles sont alors tangents intérieurement.