TS Devoir Maison n°2 Donné le : **mardi 27 septembre 2011**

À rendre le : **mercredi 5 octobre 2011**

Consigne : une copie par élève
Objectif : remédiation (sujet A), consolidation (sujet B) ou approfondissement (sujet C)
Thème : récurrence, limite d'une fonction, nombres complexes.

## - Sujet A -

**Exercice 1** :

On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{2-v_n}$

1. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $v_n < 1$
2. Etudier le sens de variation de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$

**Exercice 2** :

On considère la fonction $f$ définie sur D = $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{-3x^3 + x^2 + 7x - 3}{(x-1)^2}$

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer des réels $a$, $b$ et $c$ tels que pour tout réel de D on ait : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x-1)^2}$
2. Montrer que $\mathscr{C}_f$ possède deux asymptotes dont on donnera les équations.

**Exercice 3** :
Choisissez la (ou les ) bonne(s) réponse(s) **en justifiant votre choix**.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1) Si Z = $\dfrac{4-i}{1+2i}$, alors Z est égal à | $\dfrac{2-9i}{5}$ | $\dfrac{2-9i}{-3}$ | $3-3i$ | $\dfrac{2}{5}-\dfrac{9i}{5}$ |
| 2) Si Z = $\dfrac{z+1-\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$, avec $z = x + \mathrm{i}y$, $x$ et $y$ réels, alors $Z$ est égal à | $\dfrac{x^2+y^2+x-2y+1}{x^2+(y-1)^2} + \mathrm{i}\,\dfrac{1-y}{x^2+(y-1)^2}$ | $\dfrac{z^2+z+1+\mathrm{i}}{z^2+1}$ | $\dfrac{x^2+y^2+x-2y+1}{x^2-(y-1)^2} + \mathrm{i}\,\dfrac{1-y}{x^2-(y-1)^2}$ | $\dfrac{z+1}{z}+1$ |

## - Sujet B –

**Exercice 1** :

1. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{2-v_n}$
   a) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $v_n < 1$
   b) Etudier le sens de variation de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$
2. On considère la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$
   a) Démontrer que la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ vérifie la même relation de récurrence que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$
   b) En déduire que : pour tout entier naturel $n$, $v_n = w_n$

**Exercice 2** :

Soit $f$ la fonction définie sur ]1 ; +∞[ par $f(x) = \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{x-1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en +∞.

**Exercice 3** :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ; on appelle A le point d'affixe i.

On considère la fonction $f$ de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \dfrac{z-1+2i}{z-i}$

On pose $z = x + iy$ avec $x$ et $y$ réels

1. Montrer que $f(z)$ a pour partie réelle : $X = \dfrac{x^2 - x + y^2 + y - 2}{x^2 + (y-1)^2}$

   et pour partie imaginaire : $Y = \dfrac{3x + y - 1}{x^2 + (y-1)^2}$
2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe $z$ tel que $f(z)$ soit un imaginaire pur.

## - Sujet C -

**Exercice 1** : n°55 page 73 du livre +

5. A partir du cours ou des exercices, ou en imaginant une situation, illustrer par un exemple chacune des 4 propositions.

**Exercice 2** :

Soit $f$ la fonction définie sur ]1 ; +∞[ par $f(x) = \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{x-1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en +∞.
2. Montrer que (D) est la seule asymptote à $\mathscr{C}_f$.

   (on rappelle que pour tous réels $a$ et $b$ : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$)

**Exercice 3** :

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ; A est le point d'affixe -1.
A tout point M du plan complexe, distinct de A, d'affixe $z$, on associe le point M' d'affixe $z'$ telle que :

$$z' = \frac{-iz - 2}{z+1}$$

1. On pose $z = x + iy$ avec $x$ et $y$ réels et $z' = x' + iy'$ avec $x'$ et $y'$ réels.
   Déterminer les expressions de $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.
2. Déterminer l'ensemble $S$ des points M tels que $z'$ soit réel.