TS Devoir Maison n°7 Donné le : jeudi 15 mars 2012

À rendre le : jeudi 22 mars 2012

Consigne : une copie par élève pour le sujet A, une copie pour 2 élèves pour les sujets B et C.
Objectif : remédiation (sujet A), consolidation (sujet B) ou approfondissement (sujet C)
Thème : la fonction ln.

- Sujet A – (les parties A et B de l'exercice ci-dessous)
- Sujet B – (le sujet ci-dessous en entier)

- Partie A -

Soit u la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

1. Étudier les variations de u sur $]0 ; +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. a) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0 ; +\infty[$. On note α cette solution.
   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Montrer l'égalité : $\ln\alpha = 2 - \alpha^2$.

- Partie B -

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$.
On note f' la fonction dérivée de f sur $]0 ; +\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2. En déduire les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

- Partie C -

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées (0 ; 2) ;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0 ; +\infty[$.

1. Montrer que la distance AM est donnée par $AM = \sqrt{f(x)}$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
   a) Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0 ; +\infty[$.
   b) Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.
   c) Montrer que $AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.
3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?

- Sujet C –

Exercice 1 : *le but de cet exercice est de démontrer par deux méthodes que la dérivée de la fonction ln est la fonction inverse.*

1. On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation.
   On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et que pour tout x de $]0 ; +\infty[$ on a : $\exp(\ln x) = x$.
   À partir de ces quatre arguments, montrer que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$, qui à x associe $\frac{1}{x}$.
2. On suppose connue la dérivée de la fonction exponentielle. On suppose savoir que la fonction ln est continue sur $]0 ; +\infty[$.
   Montrer, en utilisant le nombre dérivé, que la fonction ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et que sa dérivée est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$, qui à x associe $\frac{1}{x}$.

Exercice 2 :

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_n(x) = -nx - x\ln x$.

On note $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n, dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Les courbes $(\mathscr{C}_0)$, $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ représentatives des fonctions f_0, f_1 et f_2 sont données ci-dessous.

On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

- Partie A : Étude de la fonction f_0 définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_0(x) = -x\ln x$.

1. Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f_0 sur $]0\,;+\infty[$.

- Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n, n entier naturel.

1. Démontrer que pour $x \in\,]0\,;+\infty[$, $f'_n(x) = -n-1-\ln x$ où f'_n désigne la fonction dérivée de f_n.
2. a) Démontrer que la courbe $(\mathscr{C}_n)$ admet en un unique point A_n d'abscisse e^{-n-1} une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
   b) Prouver que le point A_n appartient à la droite (Δ) d'équation $y = x$.
   c) Placer sur la figure en annexe les points A_0, A_1, A_2.
3. a) Démontrer que la courbe $(\mathscr{C}_n)$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté B_n, dont l'abscisse est e^{-n} .
   b) Démontrer que la tangente à $(\mathscr{C}_n)$ au point B_n a un coefficient directeur indépendant de l'entier n.
   c) Placer sur la figure en annexe les points B_0, B_1, B_2 ainsi que les tangentes correspondantes.