ESSENTIEL 2 : Nombres complexes (forme algébrique)

1. Connaître les formules

$i^2 = -1$
Si $z = x + iy$ avec x et y réels, alors $\overline{z} = x - iy$
Pour tous nombres complexes a et b : $(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$
z réel ⇔ Im(z) = 0 ⇔ $z = \overline{z}$
z imaginaire pur ⇔ Re(z) = 0 ⇔ $z = -\overline{z}$
Si $z = x + iy$ avec x et y réels, alors $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

<u>Enoncé 1</u> : f est la fonction définie de $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = \dfrac{iz + 4}{\overline{z} - 1}$; calculer $f(2 - 3i)$

2. Savoir résoudre une équation

a) Du premier degré : $az + b = 0$ (a et b complexes)

On isole l'inconnue d'un côté de l'égalité.

b) Avec z et $\overline{z}$

On ne sait pas résoudre directement une équation où interviennent en même temps z et $\overline{z}$.
On va donc : transformer z en $x + iy$,
se ramener à une égalité de deux complexes,
utiliser la propriété : « deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire » puis,
résoudre un système de deux équations à deux inconnues (x et y) dans $\mathbb{R}$.

c) Du second degré : $az^2 + bz + c = 0$ (avec a, b et c réels, a non nul)

On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta = 0$, une solution qui est $-\dfrac{b}{2a}$

Si $\Delta < 0$, deux solutions complexes et conjuguées $\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ *et* $\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

<u>Enoncé 2</u> :
Exercices corrigés : Livre de Mathématique de la classe (Math TS repère) voir page 152 : le paragraphe 4A : résoudre des équations

<u>Enoncé 3</u> : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 + 2z + 3 = 0$ b) $\dfrac{iz + 4}{\overline{z} - 1} = 2$

A savoir : il n'y a pas d'inéquation dans $\mathbb{C}$

3. Savoir utiliser les nombres complexes pour résoudre un exercice de géométrie

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
$z = x + iy$ avec x et y réels, est l'affixe d'un point M signifie que M a pour coordonnées (x ; y) et on a OM = $|z|$ (le module représente donc une distance : c'est un <u>réel positif</u>).

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B alors AB = $|z_B - z_A|$

<u>Rappels de géométrie</u> :

- ABC est un triangle isocèle en A ⇔ AB = AC
  ⇔ $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$

- ABC est un triangle équilatéral $\Leftrightarrow$ AB = BC = CA
  $\Leftrightarrow$ $|z_B - z_A| = |z_C - z_B| = |z_A - z_C|$

- ABC est un triangle rectangle en A $\Leftrightarrow$ $AB^2 + AC^2 = BC^2$
- ABC est un triangle rectangle en A $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

- ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (ou $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$)
  $\Leftrightarrow$ $z_B - z_A = z_C - z_D$ (ou $z_D - z_A = z_C - z_B$)
- ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ [AC] et [BD] ont le même milieu
  $\Leftrightarrow$ $\dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{z_B + z_D}{2}$

- ABCD est un rectangle $\Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme ayant un angle droit

- ABCD est un rectangle $\Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme ayant ses diagonales de même longueur (AC = BD)
  $\Leftrightarrow$ ABCD parallélogramme et $|z_C - z_A| = |z_D - z_B|$

- ABCD est un losange $\Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur (par exemple AB = BC)
  $\Leftrightarrow$ ABCD parallélogramme et $|z_B - z_A| = |z_C - z_B|$
- ABCD est un losange $\Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires.

- ABCD est un carré $\Leftrightarrow$ ABCD est un losange ET un rectangle

<u>Enoncé 4</u> : Les points A, B, C ont pour affixes respectives $a = -4$, $b = -1 + i\sqrt{3}$ et $c = -1 - i\sqrt{3}$. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

<u>Enoncé 5</u> : Les points A, B et C ont pour affixes : $z_A = -1$, $z_B = 3 + 4i$ et $z_C = 3 - 4i$

a) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.
b) Montrer que ABDC est un carré.

4. Nombres complexes et ensemble de points.

L'ensemble des points M d'affixe z tel que : • $|z - z_A| = r$ *avec r > 0 ; est le cercle de centre A de rayon r.*
• $|z - z_A| = |z - z_B|$ *est la médiatrice de [AB].*

<u>Enoncé 6</u> : Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que :

a) $|z| = |z + 2i|$ b) $|z - 1 + 2i| = 2$ c) $\left|\dfrac{iz + 4}{\overline{z} - 1}\right| = 1$

Correction

<u>Enoncé 1</u> : $f(2 - 3i) = \dfrac{i(2-3i) + 4}{\overline{2-3i} - 1} = \dfrac{2i + 3 + 4}{2 + 3i - 1} = \dfrac{7 + 2i}{1 + 3i} = \dfrac{(7+2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \dfrac{7 - 21i + 2i + 6}{1^2 + 3^2} = \dfrac{13}{10} - \dfrac{19}{10}i$

<u>Enoncé 3</u> :

a) $z^2 + 2z + 3 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac. = 4 - 12 = -8$; $\Delta < 0$ donc l'équation a deux solutions complexes et conjuguées : $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 + 2i\sqrt{2}}{2} = -1 + i\sqrt{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = -1 - i\sqrt{2}$ d'où l'ensemble des solutions est S = $\{-1 + i\sqrt{2}\ ;\ -1 - i\sqrt{2}\}$

b) $\dfrac{\mathrm{i}z+4}{\overline{z}-1}=2$ est possible à condition que $\overline{z}-1\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \overline{z}\neq 1 \quad\Leftrightarrow\quad z\neq 1$

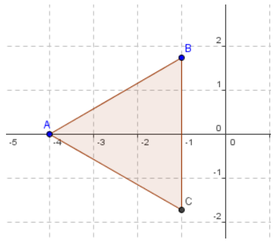
$\dfrac{\mathrm{i}z+4}{\overline{z}-1}=2 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{i}\,z+4=2(\overline{z}-1) \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{i}\,z-2\,\overline{z}=-6 \qquad (1)$

On pose $z=x+\mathrm{i}y$ avec x et y réels et on reporte dans (1) :

(1) $\Leftrightarrow\quad \mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)-2(x-\mathrm{i}y)=-6 \quad\Leftrightarrow (-y-2x)+(x+2y)\,\mathrm{i}=-6$

Or, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire ;

d'où le système : $\begin{cases}-2x-y=-6\\ x+2y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4y-y=-6\\ x=-2y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-2\\ x=4\end{cases}$ et $4-2\mathrm{i}\neq 1$ donc S = $\{4-2\,\mathrm{i}\}$



Enoncé 4 :

AB = $|b-a|=|-1+\mathrm{i}\sqrt{3}+4|=|3+\mathrm{i}\sqrt{3}|=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

AC = $|c-a|=|-1-\mathrm{i}\sqrt{3}+4|=|3-\mathrm{i}\sqrt{3}|=|\overline{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}|=|3+\mathrm{i}\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$

BC = $|c-b|=|-1-\mathrm{i}\sqrt{3}+1-\mathrm{i}\sqrt{3}|=|-2\mathrm{i}\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$

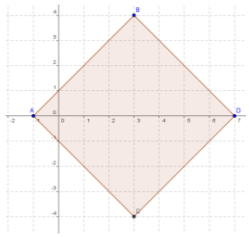
(le module d'un imaginaire pur est égal à la valeur absolue de sa partie imaginaire)

donc AB = AC = BC : le triangle ABC a ses trois côtés de même longueur : c'est un triangle équilatéral.

Enoncé 5 :

a) ABDC est un parallélogramme $\quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \quad\Leftrightarrow\quad z_B-z_A=z_D-z_C$

$\Leftrightarrow\quad 3+4\mathrm{i}+1=z_D-3+4\mathrm{i} \quad\Leftrightarrow\quad z_D=4+4\mathrm{i}+3-4\mathrm{i}=7.$



b) AB = $|3+4\mathrm{i}+1|=|4+4\mathrm{i}|=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$

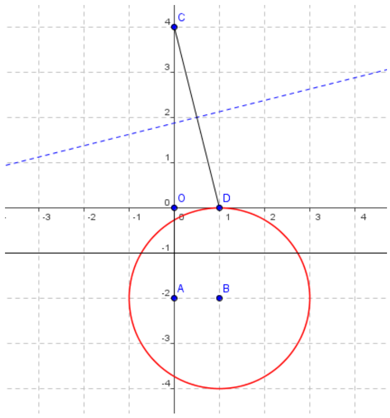
AC = $|3-4\mathrm{i}+1|=|4-4\mathrm{i}|=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$

Donc AB = AC : le parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur :
c'est un losange.

BC = $|3-4\mathrm{i}-3-4\mathrm{i}|=|-8\mathrm{i}|=8$ donc $AB^2+AC^2=32+32=64=8^2=BC^2$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A,
donc le losange ABDC a un angle droit : c'est un carré.

(on peut aussi montrer que AD = BC : un losange ayant ses diagonales de même longueur est un carré)



Enoncé 6 :

a) $|z|=|z+2\mathrm{i}| \quad\Leftrightarrow\quad |z|=|z-(-2\mathrm{i})|$ soit A le point d'affixe $-2\mathrm{i}$;

$|z|=|z+2\mathrm{i}| \quad\Leftrightarrow\quad$ OM = AM

L'ensemble des points M est la médiatrice de [OA].

b) $|z-1+2\mathrm{i}|=2 \quad\Leftrightarrow\quad |z-(1-2\mathrm{i})|=2$ soit B le point d'affixe $1-2\mathrm{i}$;

$|z-(1-2\mathrm{i})|=2 \Leftrightarrow$ BM = 2

L'ensemble des points M est le cercle de centre B de rayon 2.

c)Pour que l'expression existe $\dfrac{\mathrm{i}z+4}{\overline{z}-1}$, on doit avoir $z\neq 1$

$\left|\dfrac{\mathrm{i}z+4}{\overline{z}-1}\right|=1 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{|\mathrm{i}z+4|}{|\overline{z}-1|}=1 \quad\Leftrightarrow\quad |\mathrm{i}z+4|=|\overline{z}-1| \quad\Leftrightarrow\quad \left|\mathrm{i}(z+\dfrac{4}{\mathrm{i}})\right|=|\overline{\overline{z}-1}|$

(un complexe et son conjugué ont le même module)

$\Leftrightarrow\quad |\mathrm{i}|\left|(z+\dfrac{4}{\mathrm{i}})\right|=|z-1|$ car le conjugué de $\overline{z}-1$ est $z-1$. De plus $|\mathrm{i}|=1$

$\Leftrightarrow\quad |z-4\mathrm{i}|=|z-1| \quad\Leftrightarrow\quad$ CM = DM où C est le point d'affixe 4i et D le point d'affixe 1.

L'ensemble des points M est donc la médiatrice de [CD].