ESSENTIEL 3 : Savoir reconnaître la méthode à utiliser

Enoncé : Dans chacun des cas suivants, préciser la méthode (ou les méthodes) employée(s) pour étudier les limites de la fonction *f*. Déterminer cette limite.

1. *f* est la fonction définie sur ℝ par $f(x) = 2x - \sin(x)$. Limites en $+\infty$ et $-\infty$.

2. *u* est une fonction définie sur ℝ, à valeurs strictement positives. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = 0$

f est la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \dfrac{2u(x)-1}{u(x)+3}$

Limites en $+\infty$ et $-\infty$.

3. *u* est une fonction définie sur ℝ, on suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1} u(x) = 2$

f est la fonction définie sur ℝ par $f(x) = u(x^2+1)$

Limite en $+\infty$, $-\infty$ et 0.

4. *f* est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\sin(\frac{2}{x})$. Limite en 0

5. *f* est la fonction définie sur ℝ \ {1} par $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-1}$. Limites en $+\infty$, $-\infty$ et 1.

6. *f* est la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \sqrt{9x^2+1} - 3x$ Limite en $+\infty$ et $-\infty$.

7. *u* est une fonction définie sur ℝ, on suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 1$

f est la fonction définie sur ℝ* par $f(x) = u(\frac{1}{x})$

Limites en $+\infty$, $-\infty$ et 0.

8. *f* est la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \dfrac{x}{2-\sin x}$

Limites en $+\infty$ et $-\infty$.

9. *f* est la fonction définie sur ℝ par $f(x) = 6x^3 - 5x^2 + 2x - 7$

Limites en $+\infty$ et $-\infty$.

10. *f* est la fonction définie sur ℝ \ {0} par $f(x) = x^2\left(2 - \dfrac{1}{x}\right)$

Limites en $+\infty$, $-\infty$, 0 et 2.

Solution :

1. *Méthode* : limite par comparaison Pour tout *x* ; $-1 \le \sin x \le 1$; de même $-1 \le -\sin x \le 1$ ainsi $2x - 1 \le 2x - \sin x \le 2x + 1$

lorsque *x* tend vers $+\infty$: $2x - \sin x \ge 2x - 1$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x - \sin x) = +\infty$

avec un raisonnement analogue et avec l'autre inégalité, on obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x - \sin x) = -\infty$

2. *Méthode* : limite par composition

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0,$ on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$ par quotient même chose pour la limite en $-\infty$.

3. *Méthode :* limite par composition

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1) = +\infty \\ \text{et } \lim\limits_{X\to+\infty} u(X) = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1) = +\infty \\ \text{et } \lim\limits_{X\to+\infty} u(X) = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1) = 1 \\ \text{et } \lim\limits_{X\to 1} u(X) = 2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$$

4. *Méthode* : théorème des gendarmes

Pour tout *x* strictement positif on a : $-x \le x\sin(\frac{2}{x}) \le x$ puisque $-1 \le \sin(\frac{2}{x}) \le 1$

Or $\lim\limits_{x\to 0} -x = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$; on en déduit parle théorèmes des gendarmes que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

5. *Méthode* : limites d'une fonction rationnelle.

A l'infini, la limite d'une fonction rationnelle est égale à celle du quotient de ses termes de plus haut degré.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ par un raisonnement analogue, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1}(x^2+2)=3\\ \lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+2)=3\\ \lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0^-\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$$

6. *Méthode* : utilisation de la quantité conjuguée

Remarque : en $+\infty$, on tombe sur une forme indéterminée du type « $+\infty-\infty$ »

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)}=\frac{9x^2+1-9x^2}{\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{9x^2+1}+3x)=+\infty$ donc par inverse on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Pour la limite en $-\infty$ pas d'indétermination puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2+1}=+\infty$ par composition

et $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x=+\infty$, d'où par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

7. *Méthode* : limites par composition.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\\ \text{et } \lim\limits_{X\to0} u(X)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1 \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0\\ \text{et } \lim\limits_{X\to0} u(x)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty\\ \text{et } \lim\limits_{X\to+\infty} u(X)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty\\ \text{et } \lim\limits_{X\to-\infty} u(X)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=0$$

8. *Méthode* : limite par comparaison.

Pour tout x ; $-1\le\sin x\le1$; de même $-1\le-\sin x\le1$ donc $1\le2-\sin x\le3$

Le passage à l'inverse change le sens de l'inégalité d'où $\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{2-\sin x}\le1$

Lorsque x tend vers $+\infty$, x est positif : le sens de l'inégalité ne change pas $\dfrac{x}{3}\le\dfrac{x}{2-\sin x}\le x$

En particulier $\dfrac{x}{3}\le\dfrac{x}{2-\sin x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{3}=+\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Lorsque x tend vers $-\infty$, le sens de l'inégalité change : $x\le\dfrac{x}{2-\sin x}\le\dfrac{x}{3}$

On a $f(x)\le\dfrac{x}{3}$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{3}=-\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

9. *Méthode* : limite à l'infini d'une fonction polynôme

A l'infini, la limite d'une fonction polynôme est égale à celle du terme de plus haut degré.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 6x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 6x^3=-\infty$

10. *Méthode* : opérations sur les limites

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(2-\dfrac{1}{x})=2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(2-\dfrac{1}{x})=2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

Pour la limite en 0 on tombe sur la forme indéterminée « $0\times\infty$ », on développe : $f(x)=2x^2-x$

et par somme on obtient $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$

La fonction f étant définie en 2 , $\lim\limits_{x\to2} f(x)=f(2)=6$