ESSENTIEL 6 : Continuité

1. Etude de la continuité d'une fonction

En un réel a : on revient à la définition : f est continue en a $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Enoncé 1 : Soit f la fonction définie sur [-4 ; +∞[par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{4+x}-2} & \text{si } x \neq 0 \\ 4 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que f est continue en 0 ?

Sur un intervalle I : f est fonction usuelle (polynôme, exponentielle, rationnelle, …) ou construite par opérations (somme, produit, quotient avec dénominateur non nul, …) ou par composition de fonctions continues sur I

Enoncé 2 : On considère la fonction f définie sur $[-\frac{1}{3}$; +∞[par $f(x) = 2x - 3 + \sqrt{3x+1}$

Montrer que f est continue sur $[-\frac{1}{3}$; +∞[

2. Appliquer un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

f est une fonction définie sur un intervalle I, a et b sont deux réels de I.		
f est continue sur $[a ; b]$, strictement croissante sur $[a ; b]$, à valeurs dans $[f(a), f(b)]$, $k \in [f(a), f(b)]$	ou	f est continue sur $[a ; b]$, strictement décroissante sur $[a ; b]$ à valeurs dans $[f(b), f(a)]$, $k \in [f(b), f(a)]$
Alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a ; b]$,		

(cette propriété se généralise à un intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$, où α ou β peuvent être infinis)

Enoncé 3 : f est la fonction continue sur ℝ, dont le tableau de variation est représenté ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	-3	↗	2	↘	$-\infty$

Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = -4$.

3. Obtenir un encadrement par balayage

Enoncé 4 : f est la fonction définie sur ℝ par $f(x) = e^x - x^2$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle [– 1 ; 0].
2. Avec la calculatrice, on a dressé ci-contre la table des valeurs de $f(x)$ sur [– 1 ; 0] avec le pas 0,1.
   En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
3. Dresser ensuite la table des valeurs de $f(x)$ sur [– 0,8 ; – 0,7] avec le pas 0,01. En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. Poursuivre ce procédé afin d'obtenir un encadrement de α d'amplitude 10^{-4}.

X	Y1
-1	-.6321
-.9	-.4034
-.8	-.1907
-.7	.00659
-.6	.18881
-.5	.35653
-.4	.51032

4. Etudier le signe d'une fonction.

Enoncé 5 : énoncé 1 du TD 6.

5. Avec une fonction auxiliaire

Enoncé 6 : énoncé 3 du TD 6.

Correction

Enoncé 1 :

Par calcul direct, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ est une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ »

Pour lever l'indétermination, on utilise la quantité conjuguée du dénominateur et on obtient pour $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{x(\sqrt{4+x}+2)}{(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)} = \frac{x(\sqrt{4+x}+2)}{4+x-4} = \frac{x(\sqrt{4+x}+2)}{x} = \sqrt{4+x}+2$$

d'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{4+x}+2) = 4 = f(0)$ donc f est continue en 0.

Enoncé 2 :

f est la somme de deux fonctions :

$x \mapsto 2x-3$: fonction affine continue sur ℝ, donc continue sur $[-\frac{1}{3}\ ; +\infty[$

et $x \mapsto \sqrt{3x+1}$: fonction composée de $x \mapsto 3x+1$ suivie de $X \mapsto \sqrt{X}$

Or $x \mapsto 3x+1$ fonction affine est continue sur $[-\frac{1}{3}\ ; +\infty[$, à valeurs dans $[0\ ; +\infty[$ et

$X \mapsto \sqrt{X}$ fonction racine carrée est continue sur $[0\ ; +\infty[$;

d'où la composée est continue sur $[-\frac{1}{3}\ ; +\infty[$.

f est continue sur $[-\frac{1}{3}\ ; +\infty[$ car somme de deux fonctions continues sur $[-\frac{1}{3}\ ; +\infty[$:

Enoncé 3 :

- Sur $]-\infty\ ; 1[$, f admet pour minimum -3 donc pour tout réel x de $]-\infty\ ; 1[$, $f(x) \geq -3 > -4$:
  l'équation $f(x) = -4$ n'admet pas de solution dans cet intervalle ;

- Sur $[1\ ; +\infty[$, f est continue, strictement décroissante à valeurs dans $]-\infty\ ; 2]$, et $-4 \in\ ]-\infty\ ; 2]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = -4$ admet une unique solution sur $[1\ ; +\infty[$.

- Donc sur ℝ, l'équation $f(x) = -4$ admet une unique solution.

Enoncé 4 :

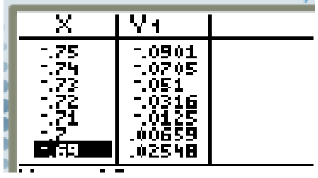
1. f est la différence entre deux fonctions de référence (exponentielle et carrée) toutes les deux dérivables sur ℝ donc f est dérivable sur ℝ et pour tout réel x, $f'(x) = e^x - 2x$

$x \in [-1\ ; 0] \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -2x \leq 2$ et comme $e^x > 0$, on a pour tout x de $[-1\ ; 0]$: $f'(x) > 0$.

f est donc strictement croissante sur $[-1\ ; 0]$.

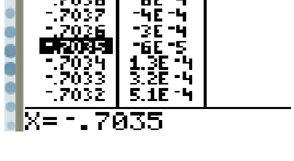
f étant dérivable sur ℝ, elle est continue sur ℝ donc sur $[-1\ ; 0]$, strictement croissante sur $[-1\ ; 0]$, à valeurs dans $\left[f(-1); f(0)\right]$, c'est-à-dire $\left[\frac{1}{e}-1;1\right]$ avec $\frac{1}{e}-1 \approx -0,63$; et $0 \in \left[\frac{1}{e}-1;1\right]$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution α sur $[-1\ ; 0]$.

2. D'après la table de valeurs : $f(-0,8) \approx -0,1907$ et $f(-0,7) \approx 0,00659$ donc $f(-0,8) < f(\alpha) < f(-0,7)$:
on en déduit $-0,8 < \alpha < -0,7$



X	Y1
-.75	-.0901
-.74	-.0705
-.73	-.051
-.72	-.0316
-.71	-.0125
-.7	.00659
-.69	.02548

3. Ci-contre la table de valeurs avec pas de 0,01 : on lit
   $f(-0,71) \approx -0,0125$ et $f(-0,7) \approx 0,00659$
   $f(-0,71) < f(\alpha) < f(-0,7)$: on en déduit $-0,71 < \alpha < -0,7$



X	Y1
-.7038	-6E-4
-.7037	-4E-4
-.7036	-3E-4
-.7035	-6E-5
-.7034	1.3E-4
-.7033	3.2E-4
-.7032	5.1E-4

X=-.7035

4. Ci-contre la table de valeurs avec pas de 0,0001 : on lit
   $f(-0,7035) \approx -6 \times 10^{-5}$ et $f(-0,7034) \approx 1,3 \times 10^{-4}$
   $f(-0,7035) < f(\alpha) < f(-0,7034)$:
   on en déduit $-0,7035 < \alpha < -0,7034$