Université Blaise Pascal

IREM Clermont-Ferrand

Mathématiques et développement durable

Christophe Pêtre

avec la collaboration de

Guy Dugour, Malika More, Bernard Vialaneix

2 septembre 2009

Extraits

Problème 1 : Comparaison de gisements éoliens

Classes	**Thèmes**	**Objectif**
• Troisième • Seconde	• Energie éolienne • Grandeurs produits, fonctions	• Application de formules

On veut comparer la production énergétique de gisements éoliens en fonction de la vitesse moyenne du vent.

- **Données :**

  Soient les deux gisements éoliens suivants :

  ⋆ site A : le vent souffle durant 2400 heures par an à exactement 10 m.s^{-1}, et ne souffle pas durant le restant de l'année.

  ⋆ site B : le vent souffle durant 1200 heures par an à exactement 20 m.s^{-1}, et ne souffle pas durant le restant de l'année.

- **Notes :**

  ⋆ $$\begin{array}{rcl} \text{Quantité d'énergie (en kWh)} & = & \text{puissance (en kW)} \times \text{durée (en h)} \\ E & = & P \times t \end{array}$$

  ⋆ La puissance cinétique théorique P d'un fluide en mouvement, traversant une section S à la vitesse v, est proportionnelle au cube de la vitesse de ce fluide :

  $P = \frac{1}{2}\rho_{\text{fluide}}\, S\, v^3$ avec P en W, ρ_{fluide} en kg.m^{-3}, S en m^2 v en m.s^{-1}.

Questions :

1. Quel est le gisement qui a la vitesse moyenne la plus élevée ?

2. Quel est le gisement le plus énergétique (c'est à dire celui qui produit annuellement le plus d'énergie) ?

Correction du problème 1 : Comparaison de gisements éoliens

1. Les vitesses moyennes des 2 gisements sont égales.

2. $P = 0,5\,\rho_{\text{fluide}}\,S\,v^3$ donc si sa vitesse est doublée, alors la puissance d'un fluide est multipliée par $2^3 = 8$.

   $$\begin{array}{rcl} \text{Quantité d'énergie (en kWh)} & = & \text{puissance (en kW)} \times \text{durée (en h)} \\ E & = & P \times t \end{array}$$

   Pour le gisement 1 : $E_1 = P_1 \times t_1$ et pour le gisement 2 : $E_2 = P_2 \times t_2$.

   Or $P_2 = 8P_1$ et $t_2 = 0,5t_1$, donc $E_2 = 8P_1 \times 0,5t_1 = 4E_1$.

   Le gisement 2 produit 4 fois plus d'énergie par an que le gisement 1.

Problème 2 : Éclairement solaire global sur un plan au niveau du sol

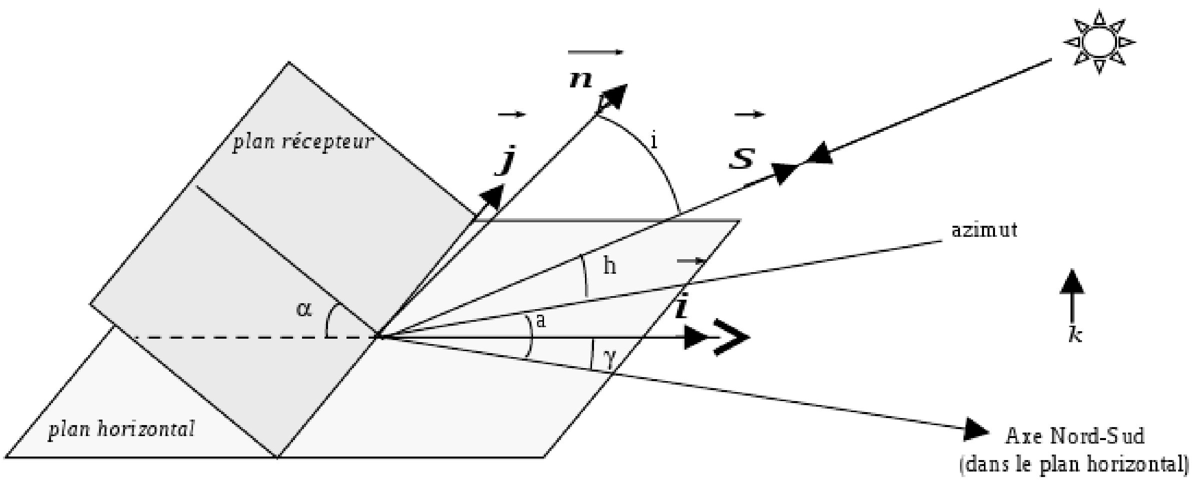
Classes	**Thèmes**	**Objectif**
• Terminale • BTS	• Energie solaire • Produit scalaire dans l'espace • Fonctions trigonométriques	• Géométrie dans l'espace • Modélisation par une fonctions trigonométriques

1. **Problème :** On se propose de connaître, pour une journée ensoleillée, l'évolution de l'éclairement solaire global (en W.m^{-2}) sur un plan récepteur (baie vitrée, capteur solaire, ...) en fonction de la latitude du lieu, de l'inclinaison de ce plan, du jour de l'année et de l'heure de la journée.

   Cet éclairement global est la somme de l'éclairement direct, de l'éclairement diffus et de l'éclairement réfléchi par le sol.

   (a) **Expression de l'éclairement direct.**

   On considère un plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal défini par le repère orthonormé $(O\ ;\vec{i};\vec{j})$, orienté d'un angle γ par rapport à l'axe Nord-Sud (voir le schéma ci-dessous). $\vec{k}$ est unitaire, vertical.

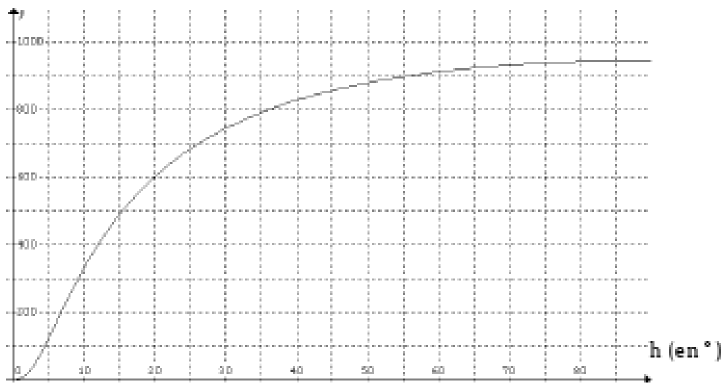


   - Les rayons solaires du rayonnement direct sont parallèles entre eux.
   - L'azimut est la projection orthogonale du rayonnement direct sur le plan horizontal.
   - L'angle a est appelé l'*azimut* du soleil.

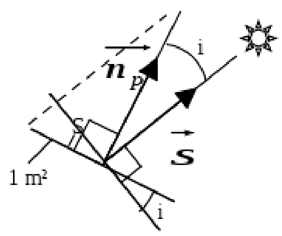
- L'angle h, entre le rayonnement direct et l'azimut, est appelé la hauteur du soleil.
- $\overrightarrow{n_P}$ est le vecteur unitaire normal au plan récepteur.
- $\vec{s}$ est le vecteur unitaire ayant pour direction celle du rayonnement direct et de sens le sens inverse du rayonnement direct.
- L'angle i, entre $\overrightarrow{n_P}$ et $\vec{s}$, est appelé l'angle d'incidence.
- Lorsqu'il n'y a pas de nuages, l'éclairement solaire direct sur un plan *normal au rayonnement solaire* est donné par :

$$E_n = 1230 \frac{-1}{e^{3,8\sin(h+1,6)}}$$

(en W.m^{-2}, avec h en degrés)



- Pour une hauteur h et un azimut a du soleil donnés, connaître l'éclairement direct sur le plan récepteur nécessite la détermination de l'angle d'incidence i. En effet, dans le plan formé par $\overrightarrow{n_P}$ et $\vec{s}$, on a : $E_n \times S =$ éclairement direct sur le plan récepteur (en W/m^2) $\times$ 1 or $S = 1 \cos i$

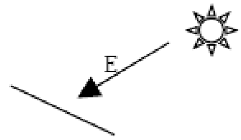


L'éclairement direct sur le plan récepteur (en W/m^2) est donc $E_n \times \cos i$.

$\boxed{\textbf{Question :}}$ Exprimer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{n_P}$ et $\vec{s}$ dans le repère orthonormé $(O\ ;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, puis $\overrightarrow{n_P}\cdot\vec{s}$; En déduire $\cos i$ en fonction de a, h, α et γ .

(b) **Expression de l'éclairement global :**

L'éclairement solaire global (en W.m^{-2}) du plan récepteur est la somme de l'éclairement direct, de l'éclairement diffus (provenant de la voûte céleste) et de l'éclairement réfléchi par le sol.



- L'éclairement direct est modélisé par $E_n \cos i$ avec $E_n = 1230 \frac{-1}{e^{3,8 \sin(h+1,6)}}$ (étudié au (a)).
- L'éclairement diffus est modélisé par $E_d\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)$ avec $E_d = 125(\sin h)^{0,4}$ (où h est en degrés).
- Cet éclairement est maximal pour $\alpha = 0$ (le plan récepteur est horizontal).
- L'éclairement réfléchi par le sol est modélisé par $0,2\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)(E_d + E_n \sin h)$.
- Cet éclairement est maximal pour $\alpha = 90°$ (le plan récepteur est vertical) ; le coefficient 0,2 est l'albédo moyenne du sol.

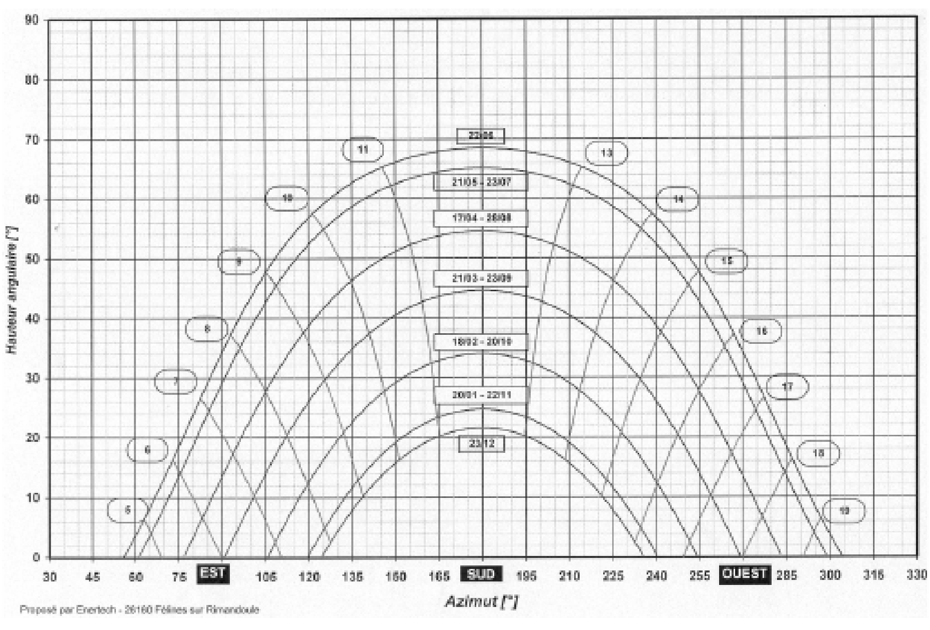
Ainsi l'éclairement solaire global (en W.m^{-2}) du plan récepteur est

$$E = E_n \cos i + E_d\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right) + 0,2\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)(E_d + E_n \sin h)$$

(en W.m^{-2}) avec $E_n = 1230 \frac{-1}{e^{3,8 \sin(h+1,6)}}$ et $E_d = 125(\sin h)^{0,4}$ (où h est en °).

2. **Première application :** Éclairement solaire global de 1 m^2 de baies vitrées verticales ($\alpha = 90°$), orientées plein sud ($\gamma = 0$) lors d'un 23 décembre ensoleillé, à la latitude 45° nord (Le Puy en Velay, Grenoble).

   On peut disposer des valeurs de a et h pour une latitude donnée, un jour et une heure donnée, notamment à partir du site de la société Enertech :



Trajectoires du soleil (latitude 45 °N)

Questions :

(a) Avec $\alpha = 90°$ et $\gamma = 0$, que devient l'expression de $\cos i$ en fonction de h et a ? Aurait-on pu trouver cette expression simplement ? Si oui, comment ? Que devient l'expression de E ?

(b) Remplir le tableau suivant :

t (en h)	t (en s)	h (en °)	a (en °)	E global (en W.m^{-2})	
7 h 45 min	0				
8 h	900	3	52,5		
8 h 30 min					
9 h					
9 h 30 min					
10 h		16	29		
10 h 30 min					
11 h					
11 h 30 min					
12 h					
12 h 30 min					
13 h					
13 h 30 min					
14 h					
14 h 30 min					
15 h					
15 h 30 min					
16 h					
16 h 15 min	30 600				

(c) Représenter graphiquement l'éclairement global reçu E (en W.m^{-2}) en fonction du temps t (en s) pour cette journée.

(d) Par quelle fonction assez simple pourrait-on modéliser E en fonction du temps t (en s) au cours de cette journée ?

(e) À midi de ce 23 décembre, calculer l'éclairement direct, l'éclairement diffus et l'éclairement réfléchi par le sol (en W/m^2), reçus par les baies verticales au sud.

3. **Seconde application :** Éclairement solaire global de 1 m^2 de capteur solaire plan à eau incliné de 30° par rapport à l'horizontale ($\alpha = 30°$), orientées plein sud ($\gamma = 0$) lors d'un 23 décembre ensoleillé, à la latitude 45° nord (Le Puy en Velay, Grenoble).

Questions :

(a) Avec $\alpha = 30°$ et $\gamma = 0$, que devient l'expression de $\cos i$ en fonction de h et a ? Que devient l'expression de E ?

(b) Remplir le tableau suivant :

t (en h)	t (en s)	h (en °)	a (en °)	E global (en W.m^{-2})	
7 h 45 min	0				
8 h	900	3	52,5		
8 h 30 min					
9 h					
9 h 30 min					
10 h		16	29		
10 h 30 min					
11 h					
11 h 30 min					
12 h					
12 h 30 min					
13 h					
13 h 30 min					
14 h					
14 h 30 min					
15 h					
15 h 30 min					
16 h					
16 h 15 min	30 600				

(c) Représenter graphiquement l'éclairement global reçu E (en W.m^{-2}) en fonction du temps t (en s) pour cette journée.

(d) Par quelle fonction assez simple pourrait-on modéliser E en fonction du temps t (en s) au cours de cette journée ?

(e) À midi de ce 23 décembre, calculer l'éclairement direct, l'éclairement diffus et l'éclairement réfléchi par le sol (en W.m^{-2}), reçus par ce capteur solaire.

Correction du problème 2 : Éclairement solaire global sur un plan au niveau du sol

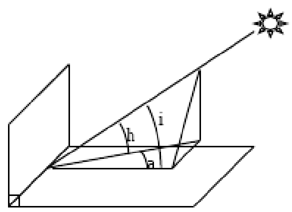
1. (a) Dans le repère orthonormé $(O\ ;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$,

$$\overrightarrow{n_P}\cdot\vec{s} = \begin{bmatrix}\cos(90-\alpha)\\ 0\\ \sin(90-\alpha)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos h\times\cos(a-\gamma)\\ \cos h\times\sin(a-\gamma)\\ \sin h\end{bmatrix} = 1\times 1\times\cos i$$

d'où $\cos i = \cos(90-\alpha)\cos h\cos(a-\gamma)+\sin(90-\alpha)\sin h$

$$\cos i = \sin\alpha\cos h\cos(a-\gamma)+\cos\alpha\sin h$$

2. (a) $\cos i = 1\cos h\cos a + 0 = \cos h\cos a$ que l'on peut trouver avec le schéma ci-dessous et en raisonnant dans les triangles rectangles.



$E = E_n\cos h\cos a + \frac{E_d}{2} + 0,1(E_d + E_n\sin h)$ (en W.m^{-2})

avec $E_n = 1230\frac{-1}{e^{3,8\sin(h+1,6)}}$ et $E_d = 125(\sin h)^{0,4}$

(b)

t (en h)	t (en s)	h (en °)	a (en °)	E global (en W.m^{-2})	$658,5\sin\left(\frac{\pi}{30600}t\right)$
7 h 45 min	0	0	55	0,06	0
8 h	900	3	52,5	51,5	60,5
8 h 30 min	2700	7	47	178	180
9 h	4500	10	41,5	288	293,5
9 h 30 min	6300	13,5	35	409	397
10 h	8100	16	29	492	486,5
10 h 30 min	9900	18,5	22,5	566,5	560
11 h	11700	20	15	615,5	614
11 h 30 min	13500	21	7,5	646	647
12 h	15300	21,5	0	658,5	658,5
12 h 30 min	17100	21	7,5	646	647
13 h	18900	20	15	615,5	614
13 h 30 min	20700	18,5	22,5	566,5	560
14 h	22500	16	29	492	486,5
14 h 30 min	24300	13,5	35	409	397
15 h	26100	10	41,5	288	293,5
15 h 30 min	27900	7	47	178	180
16 h	29700	3	52,5	51,5	60,5
16 h 15 min	30600	0	55	0,06	0

(d) On peut réaliser une très bonne approximation de E avec $E(t) = 658,5\sin\left(\frac{\pi}{30600}t\right)$.

(e) À midi du 23 décembre, chaque m^2 de baie vitrée verticale orientée plein sud à la latitude 45 °N, reçoit : un éclairement direct d'environ 585 W.m^{-2}, un éclairement diffus d'environ 42 W.m^{-2}, un éclairement réfléchi par le sol d'environ 31,5 W.m^{-2}, soit un total de 658,5 W.m^{-2}.

3. (a) $\cos i = \sin 30° \cos h \cos a + \cos 30° \sin h = 0,5\cos h\cos a + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin h$.

$E = E_n(0,5\cos h\cos a + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin h) + E_d\left(\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right) + 0,2\left(\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right)(E_d + E_n\sin h)$ (en W/m^2)

avec $E_n = 1230\frac{-1}{e^{3,8\sin(h+1,6)}}$ et $E_d = 125(\sin h)^{0,4}$ (avec h en °)

(b)

t (en h)	t (en s)	h (en °)	a (en °)	E global (en W.m^{-2})	$570\sin\left(\frac{\pi}{30600}t\right)$
7 h 45 min	0	0	55	0,03	0
8 h	900	3	52,5	52,5	52,5
8 h 30 min	2700	7	47	145,5	156
9 h	4500	10	41,5	232	254
9 h 30 min	6300	13,5	35	336,5	343,5
10 h	8100	16	29	412	421
10 h 30 min	9900	18,5	22,5	485	484,5
11 h	11700	20	15	531	531,5
11 h 30 min	13500	21	7,5	561	560,5
12 h	15300	21,5	0	574,5	570
12 h 30 min	17100	21	7,5	561	560,5
13 h	18900	20	15	531	531,5
13 h 30 min	20700	18,5	22,5	485	484,5
14 h	22500	16	29	412	421
14 h 30 min	24300	13,5	35	336,5	343,5
15 h	26100	10	41,5	232	254
15 h 30 min	27900	7	47	145,5	156
16 h	29700	3	52,5	52,5	52,5
16 h 15 min	30600	0	55	0,03	0

(d) On peut réaliser une bonne approximation (qui donne $\int_0^{30600} E(t)\mathrm{d}t$ très proche) de E avec $E(t) = 570\sin\left(\frac{\pi}{30600}t\right)$.

(e) À midi du 23 décembre, chaque m^2 de baie vitrée verticale orientée plein sud à la latitude 45 °N, reçoit : un éclairement direct d'environ 492 W/m^2, un éclairement diffus d'environ 78 W.m^{-2}, un éclairement réfléchi par le sol d'environ 4,2 W.m^{-2}, soit un total de 574,5 W.m^{-2}.

Sources :

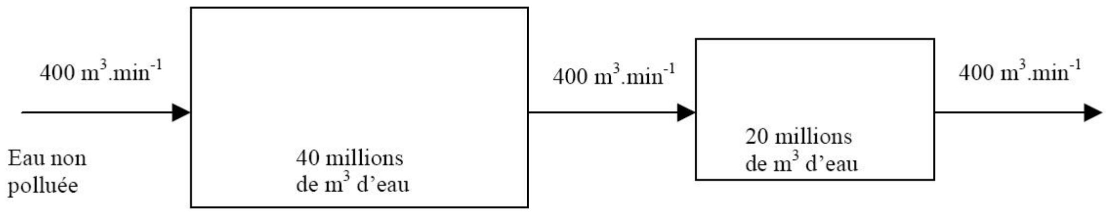
- Institut National de l'Energie Solaire (INES Chambéry)
- Cours de thermique de l'INSA de Lyon

Problème 3 : Dilution de polluants dans deux retenues sur le même cours d'eau

Classes	**Thème**	**Objectif**
• Terminale • BTS	• Suites. • Equations différentielles. • Résolution d'équations comprenant la fonction exponentielle. • Maximum d'une fonction.	• Modéliser une situation concrète par un modèle discret (suite). • Modéliser une situation concrète par un modèle continu (équation différentielle). • Comparer les résultats obtenus par les deux modèles. • Sensibiliser le lecteur au problème de la pollution de l'eau à travers le temps nécessaire à la dépollution et l'influence du débit de l'eau sur celui-ci.

Situation étudiée :

On imagine deux retenues sur le même cours d'eau dont le débit est de 400 m3.min-1, l'une étant située juste après l'autre. La retenue en amont contient 40 millions de m^3 d'eau et celle placée à l'aval contient 20 millions de m^3 d'eau.



On imagine que la retenue située en amont reçoit une pollution accidentelle de 800 kg de pesticides et on souhaite connaître l'évolution de la masse de pesticides dans chacune des retenues au cours du temps. La retenue située à l'amont est alimentée par de l'eau qui ne contient pas de pesticides. Initialement, la retenue située à l'aval ne contient pas de pesticides. On se propose, sous certaines conditions (hypothèses de modélisation), d'apporter une réponse aux questions suivantes :

1. Au bout de combien de temps l'eau de la retenue située en amont pourra-t-elle être à nouveau considérée comme eau potable ?

2. L'eau de la retenue située en aval dépassera-t-elle la norme autorisée en pesticide ?

3. Quelle sera la masse maximale de pesticides présente dans la retenue située en aval ?

4. Dans le cas d'une réponse affirmative à la question Q2, au bout de combien de temps l'eau de la retenue en aval pourra-t-elle à nouveau considérée comme eau potable ?

5. De quelle retenue, l'eau pourra-t-elle être réutilisée en premier comme eau potable ?

   Si on suppose que le débit du cours d'eau est divisé par 2 alors :

6. Quelle sera la quantité maximale de pesticides présente dans la retenue située en aval ?

7. Au bout de combien de temps obtiendra-t-on cette quantité maximale ?

8. Au bout de combien de temps l'eau de chaque retenue redeviendra-t-elle potable ?

Questions

1. **Modélisation par une suite**
   Dans cette partie, on souhaite étudier l'évolution de la masse de pesticides présente dans chaque retenue, minute par minute. On note $m_1(t)$ la masse de pesticides, exprimé en kg, présente dans la totalité de la retenue en amont en fonction du temps t, exprimé en minutes et $m_2(t)$ celle de la retenue située en aval.
   - **Norme officielle :** actuellement, l'eau utilisée pour la production d'eau potable, doit contenir moins de $0,000005$ g par litre de pesticides.
   - **Hypothèses de modélisation :**
     - ⋆ La retenue située en aval étant juste après la retenue située en amont, on peut supposer que la quantité d'eau polluée qui sort de la première retenue passe intégralement dans la deuxième.
     - ⋆ L'eau entrant dans chaque retenue en de multiples points, on considère que la quantité de pesticides se mélange parfaitement et en permanence (c'est-à-dire pendant un intervalle de temps « petit ») dans la totalité de l'eau de chacune des retenues. Ce qui simplifie la modélisation.
   - Remarque :
     Ne sachant pas exprimer $m_2(n)$ en fonction de n, l'utilisation du tableur permet d'arriver facilement aux résultats. On pourrait aussi procéder par tâtonnements avec une calculatrice.

   (a) Calculer $m_1(1)$ et $m_1(1)$(voir N2).

   (b) n désigne un entier naturel quelconque.

      i. Exprimer $m_1(n+1)$ en fonction de $m_1(n)$.

      ii. Quelle est la nature de la suite $m_1(n)$?

      iii. Pour tout entier naturel n, exprimer $m_1(n)$ en fonction de n.

      iv. Répondre à la question Q1 (voir N1).

   (c) n désigne un entier naturel quelconque.

      i. Exprimer $m_2(n+1)$ en fonction de $m_2(n)$ (voir N2).

      ii. A l'aide d'un tableur, répondre aux questions Q2, Q3, Q4 et Q5 (voir N3).

2. **Modélisation par une fonction**
   Dans cette partie, on souhaite etudier l'évolution de la masse de pesticides presente dans chaque retenue, pendant un intervalle de temps"petit" Δt. $m_1(t)$ et $m_2(t)$ ont la meme signification qu'à la partie A.
   On suppose que les fonctions m_1 et m_2 sont derivables sur $[0; +\infty[$.

(a) i. Exprimer en fonction de $m_1(t)$, le taux de variation $\Delta m_1(t)\Delta t$ de la fonction m_1 entre les instants t et $t+\Delta t$(voir N2).

ii. Le taux de variation $\Delta m_1(t)\Delta t$ admet-il une limite quand Δt tend vers 0 ? Dans l'affirmative que représente cette limite pour la fonction m_1 ? (justifier vos reponses)

iii. Justifier que la fonction m_1 est solution de l'équation différentielle $(E) \quad y'(t) = -10^{-5}y(t)$ avec $t \in [0;+\infty[$.

iv. Résoudre l'équation differentielle (E), puis déterminer la fonction m_1.

v. Répondre à la question Q1.

(b) En reprenant les différentes étapes de la question 1. et en les appliquant à la fonction m_2, démontrer que la fonction est solution de l'équation différentielle $(E) \quad y'(t) + 2\times 10^{-5}y(t) = 0,008e^{-10^{-5}t}$ avec $t \in [0;+\infty[$.

(c) Résolution de l'équation différentielle (E')

i. Soit la fonction g definie sur R par $g(t) = ke^{-10^{-5}t}$ où k désigne un réel quelconque. Déterminer le réel k pour que la fonction g soit solution de (E').

ii. Soit l'équation différentielle $(E") \quad y'(t) + 2\times 10^{-5}y(t) = 0$ avec $t \in [0;+\infty[$ et soit ϕ une fonction dérivable sur R. Demontrer que $\phi - g$ est solution de (E') si, et seulement si ϕ est solution de (E').

iii. Résoudre l'équation différentielle $(E")$. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E').

iv. Déterminer la fonction m_2.

(d) Répondre aux questions Q2, Q3, Q4 et Q5.

(e) Comparer les résultats obtenues par les méthodes des parties A et B.

3. **Influence du débit du cours d'eau sur la masse maximale de pesticides contenue dans la retenue située en aval et sur le temps de dépollution des deux retenues.**
On suppose dans cette partie que le débit du cours d'eau est divisé par 2.

(a) En reprenant la méthode décrite à la partie B, mais avec un cours d'eau dont le débit est de $200m^3.min^{-1}$, déterminer les fonctions m_1 et m_2.

(b) Répondre aux questions Q6, Q7 et Q8.

Pour en savoir plus sur les pesticides.
A signaler quelques sites intéressants sur les pesticides :
- *le site de l'union des industries de la protection des plantes* http ://www.info-pesticides.org
- *le site eau et rivières de Bretagne* http ://www.eau-et-rivieres.asso.fr/index.php

Pour aller plus loin
Il serait intéressant de chercher s'il existe une relation générale entre les volumes des retenues et la masse initiale des pesticides.