Contrôle du ballant sur une grue

Les conducteurs de grue doivent actuellement gérer le déplacement d'une charge et maîtriser les balancements indésirables de celle-ci.

Divers équipementiers de grues ont déposé des brevets autour de cette problématique.
Les grues portuaires sont principalement visées par ces techniques anti-ballant.

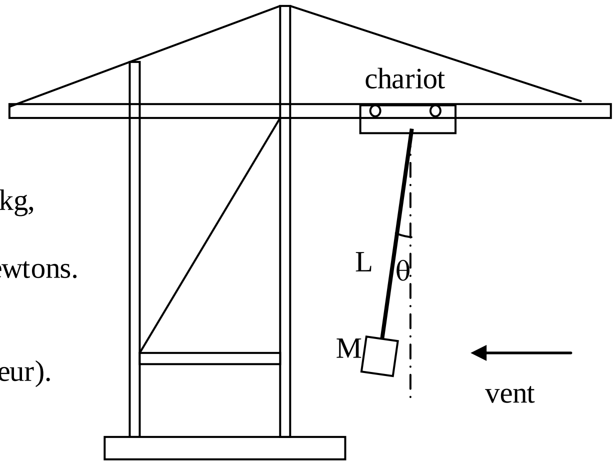
Objectifs :

- équations différentielles du second ordre
- fonctions sinusoïdales et période
- utilisation dynamique du logiciel géogébra pour trouver une solution optimale à la problématique.

I. Le chariot est à l'arrêt.

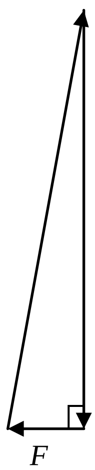
1. La grue ne fonctionne pas mais subit un fort vent de travers de 144 km/h.

On s'intéresse dans cette question à une grue comprenant un câble de longueur L, permettant de déplacer une charge d'au plus M = 30,5 t.



La charge est assimilée à une masse ponctuelle M, exprimée en kg, placée en son centre de gravité G.
La force du vent, exercée sur le point G est évaluée à 37 300 Newtons.
Le câble s'incline alors d'un angle θ .
On rappelle que le poids du container est une force verticale, de mesure $P = Mg$, où g = 9,81 m/s² (accélération de la pesanteur).

Déterminez la valeur géométrique de l'angle θ (en °, puis en rad) correspondant à ce vent de travers de 144 km/h, si la grue déplace une charge de 30,5 t.



2. Le vent cesse brutalement.

La charge se met à osciller.
On se propose de déterminer avec quelle période va osciller le container.

Les lois de l'énergie mécanique montrent que l'angle θ (exprimé en radian), fonction de la variable t (exprimé en seconde), vérifie l'équation différentielle (E) : $\frac{L}{g}\theta''(t)+\sin\theta(t)=0$.

a) En utilisant la calculatrice ou le logiciel Géogébra (tableur, courbes…),
vérifier que sin θ est très proche de θ sur l'intervalle $[-0,4\text{rad};0,4\text{rad}]$, soit $[-.......°;.......°]$.

b) Si $\theta\in[-0,4;0,4]$, l'équation différentielle (E) peut alors s'écrire : $\frac{L}{g}\theta''(t)+\theta(t)=0$.

- Déterminer la solution générale de (E), exprimée en fonction de la variable t et des constantes L et g.
- A l'instant t = 0 (lorsque le vent cesse brutalement), on considère que la mesure trigonométrique de θ est négative (d'après le sens du vent sur la figure page 1) donc $\theta = -0{,}124$ rad.
  De plus la vitesse du container est nulle, c'est-à-dire …………
  Déterminer alors l'expression de $\theta(t)$ qui vérifie (E) et les conditions initiales précédentes.

c) En utilisant le logiciel Géogébra, créer un curseur pour L (de 10 à 80 m) et représenter $\theta(t)$ en fonction de t.

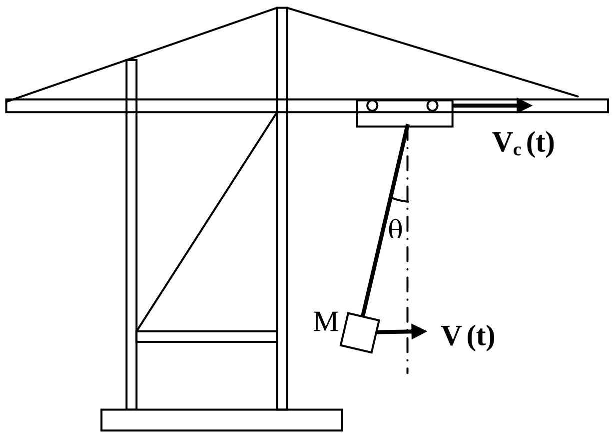
- Pour une longueur de câble de 30 m, évaluer la période d'oscillation : $T\approx$ ………s.
- Que fait la période si on augmente la longueur du câble ?
- Si on double la longueur du câble, la période est-elle doublée ?

d) En utilisant l'expression de $\theta(t)$ trouvée à la question **b)** et en prenant L =30 m, déterminer :

- la pulsation $\omega=$ ………..rad/s, à 10^{-2} près.
- la fréquence d'oscillation $f=$ …….Hz, à 10^{-2} près..
- La période d'oscillation $T=$ ……..s, à l'unité près.

II. Le chariot est en mouvement.

On suppose que le vent est négligeable.
La charge est donc initialement à l'arrêt.
Le grutier actionne le mouvement du chariot.



1. La vitesse du chariot est modélisée par la fonction $V_c(t) = 8 - 8e^{-at}$ **,** avec a une constante réelle strictement positive.

a) Etudier les variations de la fonction V_c sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

b) Quelle est la vitesse limite du chariot à long terme, notée V_∞ ?

c) Calculer la constante de temps τ du chariot, qui est la valeur de t à partir de laquelle $V_c(t)$ atteint 95 % de la valeur limite V_∞ calculée précédemment.

d) En utilisant le logiciel Géogébra, créer un curseur pour a (de 0 à 10, avec un pas de 0,01) et représenter $V_c(t)$ en fonction de t.
Selon les valeurs de a, faire des commentaires sur la vitesse du chariot et la constante de temps.

2. On se propose maintenant de prévoir comment va évoluer la vitesse $V(t)$ **de la charge.**
On a les conditions initiales suivantes :
$V(0) = 0$
$V'(0) = 0$
Le principe fondamental de la dynamique montre que la vitesse horizontale V de la charge, fonction de la variable temps, vérifie l'équation différentielle : $V''(t) + \frac{g}{L}V(t) = \frac{g}{L}V_c(t).$
Si on se place dans le cas où $L = 30$ m, cette équation différentielle s'écrit : $V''(t) + 0{,}327V(t) = 0{,}327V_c(t).$

Aide :

Le logiciel Geogébra permet de tracer la représentation graphique de la solution

de l'équation différentielle **(E) : y''(x) + b(x).y'(x) + c(x).y(x) = f(x)**

qui vérifie des conditions initiales , grâce à l'instruction (tapée dans la ligne « Saisie ») :

RésolEquaDiff[<b(x)>,<c(x)>,<f(x)>, <$x_{initial}$>, <$y_{initial}$>, <$y'_{initial}$>,<x_{final}>, <pas>]

Ouvrir une nouvelle fenêtre sur Géogébra.

a) On considère le cas où $V_c(t) = V_\infty$.

- Représenter graphiquement la vitesse de la charge, à l'aide de ce logiciel.
- La charge subit-elle un mouvement oscillant donc un ballant ? …..
- Quelle est la vitesse moyenne de la charge, lue graphiquement ? ……..

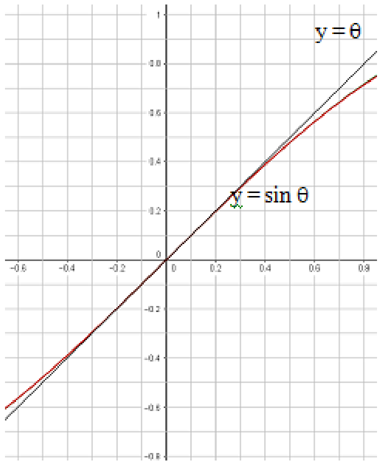
b) On considère le cas où $V_c(t) = 8 - 8e^{-at}$ **.**

- Faire varier le paramètre a pour chercher une éventuelle valeur de a qui réduirait le ballant de la charge.
- Pour cette valeur de a, calculer la constante de temps.

Corrigé :

I.1. $\tan\theta = \dfrac{F}{P} = \dfrac{37300}{30{,}5\times 1000\times 9{,}81}$, d'où $\theta \approx 0{,}124$ rad ou 7°

I.2.a) On constate que $\sin\theta$ est très proche de θ
sur l'intervalle $[-0,4\text{rad};0,4\text{rad}]$, soit $[-23°;23°]$.



I.1.b) La solution générale de (E) est $\theta(t) = C_1\cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{L}}\,t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\dfrac{g}{L}}\,t\right)$

Si $\theta(0) = -0{,}124$, alors $C_1\cos(0) + C_2\sin(0) = -0{,}124$ donc $C_1 = -0{,}124$.

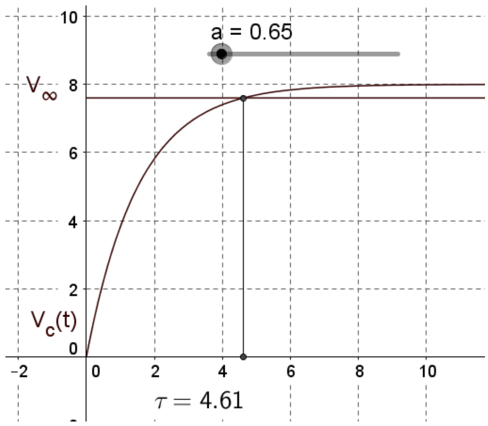
$\theta'(t) = -C_1\sqrt{\dfrac{g}{L}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{g}{L}}\,t\right) + C_2\sqrt{\dfrac{g}{L}}\cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{L}}\,t\right)$.

Si $\theta'(0) = 0$, alors $-C_1\sqrt{\dfrac{g}{L}}\sin(0) + C_2\sqrt{\dfrac{g}{L}}\cos(0) = 0$ donc $C_2 = 0$.

L'expression de $\theta(t)$ qui vérifie (E) et les conditions initiales est : $\theta(t) = -0{,}124\cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{L}}\,t\right)$.

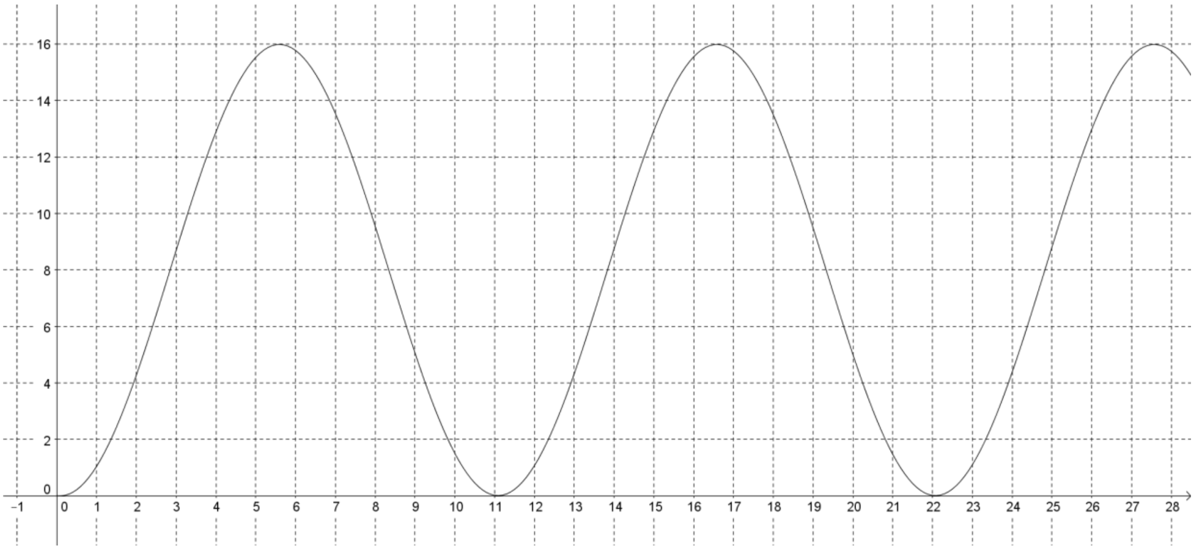
I.1.c) τ est solution de l'équation $8 - 8e^{-a\tau} = 0{,}95\times 8$, d'où $\tau = \dfrac{\ln 0{,}05}{-a}$

I.1.d)



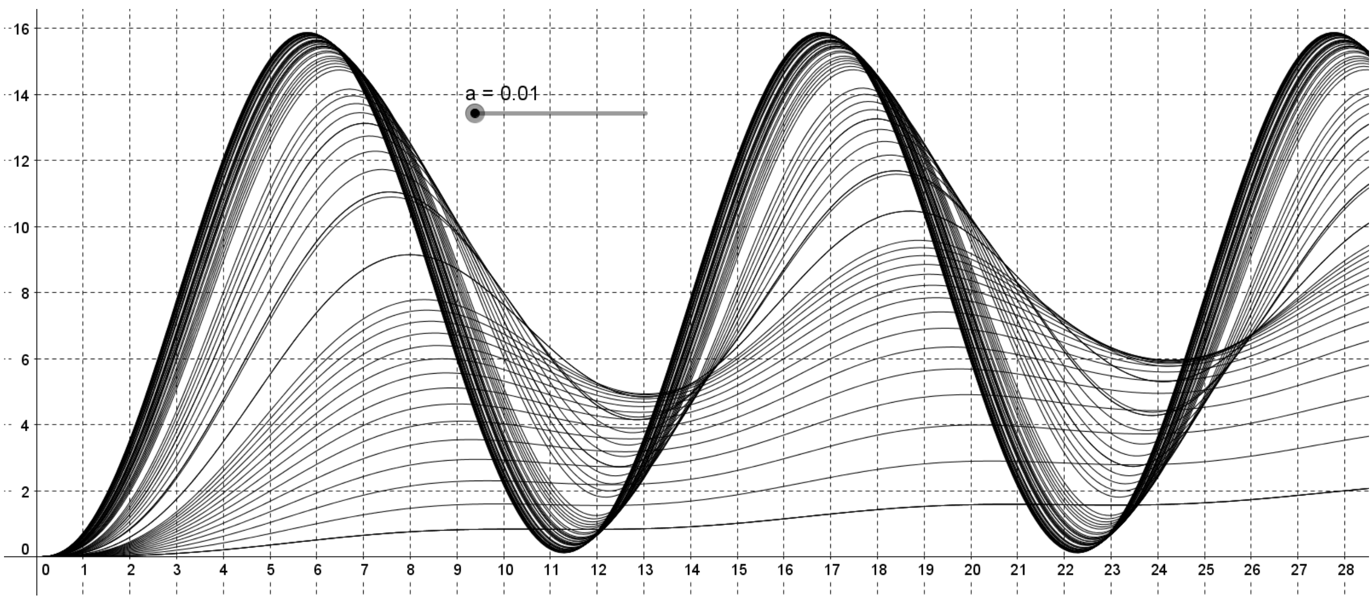
Si on augmente a, la vitesse du chariot se stabilise plus rapidement autour de sa vitesse limite et la constante de temps diminue.

2.a) Avec l'instruction : **RésolEquaDiff [0 , 0.327 , 2.616 , 0 , 0 , 0 , 30, 0.1]**, on obtient point par point sur l'intervalle [0 ; 30], avec un pas de 0,1, la représentation graphique de la solution de l'équation différentielle $V''(t)+0,327V(t)=2,616$ qui vérifie les conditions initiales $V(0)=0$ et $V'(0)=0$.



On constate que la vitesse V de la charge est une fonction sinusoïdale. La vitesse moyenne est de 8 m/s.
La charge subit un mouvement oscillant. Il y a donc ballant.

2.b) Avec l'instruction : **RésolEquaDiff [0 , 0.327 , 0.327(8-8exp(-ax) , 0 , 0 , 0 , 30, 0.1]**, on obtient point par point sur l'intervalle [0 ; 30], avec un pas de 0,1, la représentation graphique de la solution de l'équation différentielle $V''(t)+0,327V(t)=0,327(8-8e^{-at})$ qui vérifie les conditions initiales $V(0)=0$ et $V'(0)=0$.
En activant l'option *Afficher la trace* (par un clic droit sur Intégrale Numérique) puis en faisant varier le curseur, on peut visualiser différents graphiques de la vitesse horizontale V de la charge.



On constate que cette vitesse V « se lisse » pour une valeur de a très petite. Dans ce cas, le ballant de la charge sera fortement réduit.

Pour $a=0,01$, la vitesse du chariot s'écrit $V_c(t)=8-8^{-0,01t}$.

D'après le résultat de la question **II.1.c)** la constante de temps est $\tau=\dfrac{\ln 0,05}{-a}$, soit $t=\dfrac{\ln(0,05)}{-0,01}\approx 300\text{s}$ ou 5 min.