Processus de Poisson

D'après « Construction d'un modèle de Poisson » de Michel Henry
Dans *Autour de la modélisation en probabilités*, Presses Universitaires Franc-Comtoises, 2001

Rappel des programmes de BTS
« La loi de Poisson est introduite comme correspondant au nombre de réalisations observées, durant un intervalle de temps de longueur donnée, lorsque le temps d'attente entre deux réalisations est fourni par une loi exponentielle ».

Problème de vacances : Par une belle nuit d'été, on observe en moyenne 12 étoiles filantes par heure. Quelle est la probabilité d'en voir trois dans le prochain quart d'heure ?

Hypothèses de travail

Considérons l'événement A : « observer une étoile filante ». A partir d'un instant initial $t_0 = 0$, on peut observer à tout instant la manifestation d'un événement A. On suppose que cet événement est instantané. L'ensemble de ces observations constitue une suite croissante d'instants successifs. On s'intéresse au nombre d'évènements A produits dans une durée d'observation $[0\ ;\ T]$.
On suppose que :

- il n'y a pas de moments où une étoile apparaît plus souvent que d'autres (on suppose donc que la fréquence d'arrivée des étoiles filantes ne dépend pas de l'instant du début de l'observation) ;
- les étoiles filantes ne sont pas très fréquentes ;
- l'instant où l'on observe l'une d'entre elles ne dépend pas des arrivées précédentes.

Nous sommes en présence d'un phénomène **homogène dans le temps**, **rare** et **sans mémoire**.
Cette situation est caractérisée par un paramètre qui peut être évalué : on peut observer que, dans des conditions analogues, A se produit en moyenne c fois dans un intervalle de temps unité (cadence du phénomène).

Modèle probabiliste

On considère comme ensemble des issues possibles, l'ensemble continu Ω de tous les instants où A peut théoriquement se produire à partir d'un instant initial d'observation ($\Omega =]0\ ;\ +\infty[$).
Ces hypothèses se traduisent mathématiquement de la façon suivante :

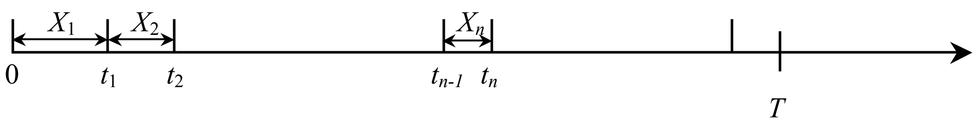
- la probabilité d'observer A dans l'intervalle $[t_i\ ;\ t_{i+1}]$ ne dépend que de la durée $t_{i+1} - t_i$ (*phénomène homogène dans le temps*) ;
- la probabilité qu'il se produise deux (ou plus) évènements A à la fois (c'est-à-dire dans un petit intervalle de temps Δt) est négligeable devant la probabilité d'en observer un seul dans ce même intervalle de temps (*phénomène rare*). De plus cette probabilité tend vers 0 avec Δt. Ainsi, la probabilité que A se produise à un instant déterminé a priori est considérée comme nulle ;
- les évènements : « A se produit entre les instants t_i et t_{i+1} » sont indépendants (*phénomène sans mémoire*).

Des deux premières hypothèses, on va pouvoir supposer que la probabilité d'observer A dans un petit intervalle de temps Δt est proportionnelle à la longueur de cet intervalle, le coefficient de proportionnalité étant λ.

Schéma Poissonnien

On désigne par :

- $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ les instants aléatoires où l'on observe les étoiles filantes.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ les durées aléatoires égales à $t_1 - 0$, $t_2 - t_1$, … , $t_n - t_{n-1}$, … ; ainsi les X_i désignent les temps séparant deux observations successives de A.
- N le nombre d'étoiles filantes observées entre les instants 0 et T.



Ce schéma décrit un **processus de Poisson homogène**.

Lois des variables aléatoires

- Dans ce modèle, X_i représente la durée qui sépare l'instant t_{i-1} de l'observation de la prochaine étoile filante. Comme on a supposé que le phénomène est homogène dans le temps, les variables X_1 , X_2 , …, X_n suivent la même loi.
  De plus les X_i concernent des intervalles de temps disjoints au cours desquels les arrivées éventuelles de A sont supposées indépendantes : les variables X_1 , X_2 , …, X_n sont donc indépendantes.
  La loi commune des X_i est la loi exponentielle[1] de paramètre λ.
  Leur densité de probabilité est donc : $f_{X_i}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$.
  On a : $\mathrm{E}(X_i) = \dfrac{1}{\lambda}$ (c'est le temps moyen d'attente de A)
  $Var(X_i) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

- La variable N suit la loi de Poisson[2] de paramètre λT.
  On a : $\mathrm{E}(N) = \lambda T$ (c'est le nombre moyen d'évènements A qui se produisent dans une durée T)
  $Var(N) = \lambda T$.

Remarque *:* Il y a c évènements A par unité de temps, donc $c = \dfrac{\mathrm{E}(N)}{T} = \lambda$. Par conséquent, λ représente la cadence c du phénomène (nombre moyen d'étoiles filantes par unité de temps).

Réponse à la question posée

On veut calculer la probabilité d'observer 3 étoiles filantes en un quart d'heure.
Prenons pour unité de temps une heure. Les données statistiques indiquent une moyenne de 12 étoiles filantes à l'heure ; on a donc pour un quart d'heure :

$$\lambda T = 12 \times \frac{1}{4} = 3$$

Et : $$\mathrm{P}(N = 3) = \frac{3^3}{3!} e^{-3} \approx 0,224$$

---

1 La démonstration est dans l'article cité en introduction, à savoir « Construction d'un modèle de Poisson » de Michel Henry dans *Autour de la modélisation en probabilités*, Presses Universitaires Franc-Comtoises, 2001, *p 228*.

2 La démonstration est dans le même article, *p 230*.

Autre exemple : la désintégration radioactive

Pour étudier le comportement d'un élément radioactif, un capteur enregistre les instants successifs où l'un des atomes se désintègre, ceci afin de déterminer la « période » (ou « demi-vie ») de l'élément radioactif considéré, c'est-à-dire la durée au bout de laquelle le nombre d'atomes de l'élément a diminué de moitié.
Si on considère l'événement A : « un atome se désintègre », on observe expérimentalement que A est rare, homogène dans le temps et sans mémoire. On est donc en présence d'un processus de Poisson.

1. A chaque atome radioactif, on associe le temps d'attente de sa désintégration (donc égal à sa durée de vie). On note X cette variable aléatoire. X suit la loi exponentielle de paramètre λ (λ : taux de désintégration de l'élément radioactif correspondant à la cadence du phénomène).
a) Au bout de la période T, la proportion des atomes désintégrés est $\frac{1}{2}$. On admet que cette fréquence est égale à la probabilité pour un atome d'être désintégré. Montrer que la période T est égale à $\frac{\ln 2}{\lambda}$.
b) Calculer le taux de désintégration de l'iode 131 sachant que sa période est de 8,06 jours et celui du radium pour lequel la période est de 1580 années.
c) Lors d'une expérience, on étudie une quantité d'uranium 238 et on observe une cadence de $\lambda \approx 12$ désintégrations par seconde. Calculer la période de l'uranium 238.

2. On note N le nombre de désintégrations entre les instants 0 et τ pour un échantillon de matière radioactive contenant n atomes. N suit la loi de Poisson d'espérance $E(N) = \lambda \times n \times \tau$.
a) Calculer le nombre moyen journalier de désintégrations avec 10^{10} atomes d'iode 131. En déduire le nombre moyen de désintégrations par seconde.
b) Déterminer la probabilité qu'il n'y ait aucune désintégration pendant une seconde avec 10^{10} atomes de radium.
c) Quelle est la probabilité qu'il y ait 3 ou 4 désintégrations pendant une nanoseconde avec 10^{8} atomes d'uranium 238 ?

3. *Datation par la méthode du carbone 14.*
Le carbone 14 est produit régulièrement en haute atmosphère lors de réactions nucléaires induites par des protons rapides d'origine galactique. Il est en proportion à peu près constante dans les environnements terrestres : la proportion est d'un noyau de carbone 14 pour $7{,}7\times10^{11}$ noyaux de carbone 12. Lorsqu'un individu ou une plante meurt, son métabolisme cesse de fonctionner, son carbone n'est plus renouvelé et le carbone 14 qu'il contient se désintègre en redonnant un noyau d'azote 14 avec une demi-vie de 5730 ans. Il suffit alors de mesurer la proportion du carbone 14 dans les restes (os, cheveux, bois …) pour connaître l'époque de la mort.
Dans 1g de carbone naturel, il y a 5×10^{22} noyaux parmi lesquels environ $6{,}5\times10^{10}$ de carbone 14. Calculer le nombre moyen de désintégration par siècle du carbone 14.

Correction

1.a) X suit la loi exponentielle de paramètre λ : $\quad \mathrm{P}(X \le \mathrm{T}) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{T}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{T} = \frac{-\ln 1/2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{\lambda}$

b) si T = 8,06 jours, $\lambda = \frac{\ln 2}{8{,}06} \approx 0{,}086$ désintégrations par jour.

si T =1580 années, $\lambda = \frac{\ln 2}{1580} \approx 0{,}0004$ désintégrations par an.

c) si $\lambda \approx 12$, $\mathrm{T} = 146 \times 10^{15}$ secondes, soit $4{,}6 \times 10^{9}$ années.

2. N suit $\mathcal{P}(\mu)$ avec $\mu = \lambda \times n \times \tau$.

a) $E(N) = 0{,}086 \times 10^{10}$ par jour, soit $\frac{0{,}086 \times 10^{10}}{24 \times 3600} \approx 9954$ par seconde.

b) $\mathrm{P}(N=0) = \mathrm{e}^{-\frac{0{,}0004 \times 10^{10}}{365 \times 24 \times 3600}} = \mathrm{e}^{-0{,}127} \approx 0{,}88$.

c) N suit $\mathcal{P}(\mu)$ avec $\mu = \frac{12 \times 10^{8}}{10^{9}} = 1{,}2$. $\quad \mathrm{P}(3 \le N \le 4) = \mathrm{P}(N=3) + \mathrm{P}(N=4) = 0{,}087 + 0{,}026 \approx 0{,}113$

3. $E(N) = \frac{\ln 2 \times 6{,}5 \times 10^{10}}{5730} \times 100$ soit environ 786 000 000 désintégrations par siècle.

Exercices

Exercice 1

Ladislaus von Bortkiewicz (1868 - 1931) a étudié le nombre annuel de morts par ruade de cheval dans 10 corps d'armée de l'armée prussienne de 1875 à 1894. Il y a donc 200 observations.

Nombre de morts	0	1	2	3	4	Total
Nombre de corps d'armée	109	65	22	3	1	200

1. On note X la variable aléatoire qui, à un corps d'armée associe son nombre de victimes par ruade.
Etablir le tableau de la loi de probabilité de X et son espérance mathématique. (On prendra pour probabilités les fréquences observées.)

2. On désire approcher X par une loi de Poisson. Quel paramètre va-t-on prendre ?
Comparer les probabilités obtenues avec cette loi aux valeurs observées.

Exercice 2

Le nombre X de désintégrations d'une substance radioactive durant un intervalle de temps de 7,5 secondes suit une loi de Poisson de paramètre 3,87.

1. Quel est le nombre moyen de désintégrations durant un intervalle de temps de 7,5 secondes ? Calculer l'écart-type correspondant.

2. Déterminer la probabilité qu'il n'y ait aucune désintégration durant un intervalle de temps de 7,5 secondes.

3. Quelle est la probabilité qu'il y ait 3 ou 4 désintégrations durant un intervalle de temps de 7,5 secondes ?

Exercice 3

Une entreprise de logistique observe qu'en moyenne il arrive chaque jour 4 camions pour le déchargement. Son entrepôt dispose de 5 quais de déchargement. On admet que les arrivées des camions sont indépendantes les unes des autres.

Soit X la variable aléatoire qui à un jour donné associe le nombre de camions arrivant pour décharger. On admet que X suit une loi de Poisson.

On considère que lorsqu'un camion arrive, il lui faut une journée pour décharger.

1. Quelle est la probabilité qu'un jour donné, aucun camion n'attende pour décharger ?

2. L'entreprise souhaite augmenter le nombre de quais de déchargement. Combien doit-elle en construire pour que la probabilité de n'avoir aucun camion en attente soit supérieure à 95% ?

3. On prévoit un doublement de la fréquence d'arrivée des camions. Combien l'entreprise doit-elle alors construire de quais pour que la probabilité de n'avoir aucun camion en attente soit supérieure à 95% ?

Exercice 4

Dans ce service, à l'ouverture, 6 guichets sont ouverts. Il faut en moyenne 5 minutes à une personne travaillant derrière un guichet pour traiter un client.

On suppose que dans ce service, il arrive en moyenne une personne toutes les minutes et que les arrivées sont indépendantes.

1. J'arrive dans ce service 5 minutes après l'ouverture. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de clients arrivés avant moi. On admet que X suit une loi de Poisson.

- **a)** Donner le paramètre de la loi de Poisson.
- **b)** Quelle est la probabilité que 4 guichets soient occupés lorsque j'arrive ?
- **c)** Quelle est la probabilité que je n'attende pas ?
- **d)** Quelle est la probabilité que tous les guichets soient occupés ?
- **e)** Quelle est la probabilité que j'attende moins de 10 minutes ?

2. Une personne arrive dans le service 5 minutes après l'ouverture. Combien devrait-on ouvrir de guichets pour que la probabilité qu'elle attende soit inférieure à 5% ?

3. On se rend compte qu'un certain jour de la semaine, la fréquence d'arrivée des clients double par rapport aux autres jours. Si une personne arrive dans le service 5 minutes après l'ouverture, combien devrait-on alors ouvrir de guichets pour que la probabilité qu'elle attende soit inférieure à 5% ?

Exercice 5

Un distributeur automatique élabore du jus d'orange en mélangeant de l'eau et du concentré d'orange.

Une enquête a montré que la variable aléatoire Z qui, à toute période de 30 jours associe le nombre de pannes mécaniques du distributeur, suit la loi de Poisson telle que : $P(Z = 1) = 6 \times P(Z = 3)$.

1. Calculer le paramètre de cette loi de Poisson.

2. Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins deux mises hors service du distributeur, en un mois de 30 jours, par défaillance mécanique du distributeur.

Exercice 6

On admet que le nombre d'appels téléphoniques reçus par un standard pendant un temps $t > 0$, suit une loi de Poisson de paramètre λ. On note X le temps d'attente du premier appel et Y_t le nombre d'appels reçus entre 0 et t.

1. Comparer les évènements $(X > t)$ et $(Y_t = 0)$. Calculer la probabilité de ces deux évènements.

2. En déduire que le temps d'attente du premier appel suit une loi exponentielle.

Exercice 7

Si dans une population une personne sur cent est un centenaire, quelle est la probabilité de trouver au moins un centenaire parmi 100 personnes choisies au hasard ? (Quelle loi peut-on utiliser ?) Et la probabilité de trouver au plus deux centenaires parmi 200 personnes ?

Exercice 8

Une population comporte en moyenne une personne mesurant plus de 1m90 sur 80 personnes. Sur 100 personnes, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m (quelle loi peut-on utiliser ?). Sur 300 personnes, calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux personnes mesurant plus de 1.90m.

Exercice 9

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier k non nul : $P(X = k) = \frac{4}{k} P(X = k-1)$.

Déterminer la loi de X.

Correction des exercices

Exercice 1

1. Loi de probabilité de X :

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,545	0,325	0,11	0,015	0,005

$E(X) = 0{,}61$

2. Loi de probabilité de la loi de Poisson $\mathcal{P}$**(0,61)** :

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,543	0,331	0,101	0,021	0,003

Exercice 2

1. X suit $\mathcal{P}(3{,}87)$; $E(X) = 3{,}87$; $\sigma(X) = \sqrt{3{,}87} \approx 1{,}97$.

2. $P(X = 0) = e^{-3{,}87} \approx 0{,}021$;

3. $P(3 \leq X \leq 4) = P(X = 3) + P(X = 4) \approx 0{,}201 + 0{,}195 \approx 0{,}396$

Exercice 3

1. X suit $\mathcal{P}$**(4)**.

Il n'y a aucun camion en attente si X est au plus égal à 5 puisqu'il y a 5 postes de déchargement : $P(X \leq 5) \approx 0{,}784$.

2. On doit trouver le nombre N tel que $P(X \leq N) \geq 0{,}95$.
Or $P(X \leq 7) = 0{,}948$ et $P(X \leq \mathbf{8}) = 0{,}978$: il faut donc **8** quais de déchargement.

3. En moyenne 4 camions par jour venant livrer. On prévoit un doublement, donc 8 camions par jour en moyenne viendront livrer. Par conséquent, X suivra la loi de Poisson de paramètre 8.
Or $P(X \leq 12) = 0{,}937$ et $P(X \leq \mathbf{13}) = 0{,}967$: il faut donc **13** quais de déchargement.

Exercice 4

1. a) X suit $\mathcal{P}$**(5)**.
b) $P(X = 4) \approx 0{,}175$;
c) $P(X \leq 5) \approx 0{,}616$;
d) $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx 0{,}384$;
e) $P(X < 12) = P(X \leq 11) \approx 0{,}995$.

2. Soit k le nombre de guichets nécessaires. On doit avoir : $P(X \geq k) < 0{,}5$, soit : $P(X < k) > 0{,}95$.
Or $P(X \leq 8) \approx 0{,}932$ et $P(X \leq 9) \approx 0{,}968$. Il faut donc ouvrir **10** guichets.

3. X suit $\mathcal{P}$**(10)**. On doit avoir $P(X < k) > 0{,}95$.
Or $P(X \leq 14) \approx 0{,}917$ et $P(X \leq 15) \approx 0{,}951$. Il faut donc ouvrir **16** guichets.

Exercice 5

1. Si Z suit la loi de Poisson de paramètre μ, alors on doit avoir :

$$\mu \times e^{-\mu} = 6 \times \frac{\mu^3}{6} \times e^{-\mu} \Leftrightarrow \mu = \mu^3 \text{ donc } \mu = 1 \text{ (car } \mu > 0) \quad \text{donc } \mathbf{Z \text{ suit } \mathcal{P}(1)}.$$

2. $P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0{,}736 \approx \mathbf{0{,}264}$.

Exercice 6

1. X est le temps d'attente du premier appel et Y_t le nombre d'appels reçus entre 0 et t.
Pour $t > 0$, les évènements ($X > t$) et ($Y_t = 0$) sont égaux.

Donc : $P(X > t) = P(Y_t = 0) = \dfrac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$

2. Fonction de répartition de X : $F(t) = P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$

Densité de probabilité de X : $f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

X suit bien la loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 7

On appelle X le nombre de centenaires pris parmi 100 personnes.
La probabilité $p = 1/100$ étant faible, on peut appliquer la loi de Poisson d'espérance $100p = 1$ à X : X suit $\mathcal{P}(\mathbf{1})$.
On cherche donc : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) =$ **0,63**.
Si Y est le nombre de centenaires pris parmi 200 personnes, alors l'espérance est 2 et :

$P(Y \leq 2) =$ **0,68**.

Exercice 8

On appelle X le nombre de personnes mesurant plus de 1.90m parmi 100.

X a pour espérance $\dfrac{100}{80} = 1{,}25$, donc X suit la loi de Poisson de paramètre 1,25.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) =$ **0,71**.

Si Y est le nombre de personnes mesurant plus de 1.90m parmi 300, Y a pour espérance $\dfrac{300}{80} = 3{,}75$.

$P(Y \leq 2) =$ **0,28**.

Exercice 9

Par itérations successives : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \dfrac{4}{k} \times \dfrac{4}{k-1} \times \dfrac{4}{k-2} \times ... \times \dfrac{4}{1} P(X = 0) = \dfrac{4^k}{k!} P(X = 0)$

X est une variable aléatoire, donc $\displaystyle\sum_{k \geq 0} P(X = k) = 1$

d'où : $1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{k!} P(X = 0) = P(X = 0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{k!} = P(X = 0) \times e^4$

soit $P(X = 0) = \dfrac{1}{e^4} = e^{-4}$ et $P(X = k) = e^{-4}\dfrac{4^k}{k!}$: **X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(4)$.**

Approcher une loi binomiale par une loi de Poisson ou une loi normale ?

Les calculatrices ont intégré les calculs de probabilités au programme de lycée, en particulier ceux concernant la loi binomiale.
Dans ces conditions, les approximations de cette loi par une loi de Poisson ou une loi normale sont-elles encore justifiées ?

Exemple 1 *Source : Ministère de l'Intérieur-Enquête noyades 2012*

Répartition des noyades suivies de décès selon les conditions de survenue et de sexe :

	Hommes	Femmes	Manquant	Total
Accidentelles	370	125	2	497
Suicide ou tentative de suicide	71	66		137
Agression	1	3		4
Origine non connue	15	8	2	25
Total	457	202	4	663

1. Montrer que la fréquence de noyade sur une année dans la population française est d'environ 10^{-5}.

Dans la suite de l'exercice, on considère qu'un individu français, pris au hasard, peut se noyer avec une probabilité de 10^{-5}.

2. Soit X la variable aléatoire mesurant le nombre annuel de noyades dans une population de n individus.
Quelle est la loi de X ?

3. On s'intéresse à une ville de la taille de Clermont-Ferrand, soit une population d'environ 140 000 habitants. Quelle est la probabilité qu'au plus 2 personnes décèdent de noyade dans une année ?

4. On s'intéresse à une ville de la taille de Paris, soit une population d'environ deux millions d'habitants.
Quelle est la probabilité qu'au plus 10 personnes décèdent de noyade dans une année ?

Clermont-Ferrand, en 2011, était la 23^e commune de France avec 140 957 habitants et la 19^e aire urbaine de France avec ses 467 178 habitants.
Le nombre d'habitants à Paris intra-muros atteignait 2 243 833 personnes (population municipale) en 2010 tandis qu'au 1er janvier 2011, 11 852 900 personnes vivaient en Ile-de-France.

Exemple 2

On suppose que, lors d'un grand jeu de loterie, il y ait un million de participants.
Chaque personne a une chance sur un million de gagner
Quelle est la probabilité qu'il y ait un seul gagnant à ce jeu ?

Rappels :

- ✓ On peut approcher une loi binomiale par une loi de Poisson lorsque $n \geq 30, p \leq 0{,}1$ et $E(X) = np \leq 15$.
  On effectue alors les calculs avec la loi de Poisson de paramètre $\mu = n \times p$.

- ✓ On peut approcher une loi binomiale par une loi normale lorsque $n \geq 30,\ E(X) = np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.
  On effectue alors les calculs avec la loi normale de paramètres $\mu = n \times p$ et $\sigma = \sqrt{n \times p \times (1-p)}$, sans oublier la correction de continuité :
  si X suit la loi $\mathcal{B}(n\ ;p)$ et Z la loi $\mathcal{N}(\mu\ ;\sigma^2)$, alors $\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}(k - 0{,}5 \leq Z \leq k + 0{,}5)$.

Correction de l'exemple 1

1. $f = \dfrac{663}{66\,030\,000} \approx 1{,}004 \times 10^{-5}$

2. X suit $\mathcal{B}(n\ ;\ 10^{-5})$; $E(X) = n \times 10^{-5}$.

3. X le nombre annuel de noyades dans une population de 140 000 personnes.
X suit $\mathcal{B}(140\,000\ ;\ 10^{-5})$; $E(X) = 140\,000 \times 10^{-5} = 1{,}4$
$P(X \leq 2) = 0{,}83$

4. X le nombre annuel de noyades dans une population de 2 000 000 personnes.
X suit $\mathcal{B}(2\,000\,000\ ;\ 10^{-5})$;
$P(X \leq 10)$: *impossible avec la plupart des calculatrices*.

$E(X) = 2\,000\,000 \times 10^{-5} = 20$: on ne peut pas approcher la loi binomiale par une loi de Poisson.

On approche donc la loi de X par la loi normale $\mathcal{N}(20\ ;(\sqrt{20})^2)$; on obtient : $P(0 \leq X \leq 10) =$ **0,013**
ou, si on tient compte de la correction de continuité, : $P(-0{,}5 \leq X \leq 10{,}5) =$ **0,017**.

Remarque : avec un tableur, on obtient pour la loi binomiale : $P(X \leq 10) = 0{,}011$.

Correction de l'exemple 2

1. On appelle X le nombre de gagnants. X suit $\mathcal{B}(1\,000\,000\ ;\ 10^{-6})$; $E(X) = 1$
Calcul de $P(X = 1)$: *impossible avec la plupart des calculatrices*.

$E(X) = 1$: on peut approcher la loi de X par la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.
On obtient : $P(X = 1) = e^{-1} \approx$ **0,368**.

Remarques :
- avec un tableur, on obtient pour la loi binomiale : $P(X = 1) = 0{,}368$.
- si on fait les calculs avec la loi normale $\mathcal{N}(1\ ;\ 1)$, on obtient : $P(X = 1) = P(0{,}5 \leq Z \leq 1{,}5) = 0{,}383$.

Convergence de la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n\,;\dfrac{1}{n}\right)$ vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$

Approche graphique

Activité élève (sur tableur) :

Travail à réaliser :

1. Créer une feuille de calcul qui permet d'obtenir P($X = k$) (pour $0 \leq k \leq 10$) si X est une variable aléatoire qui suit :

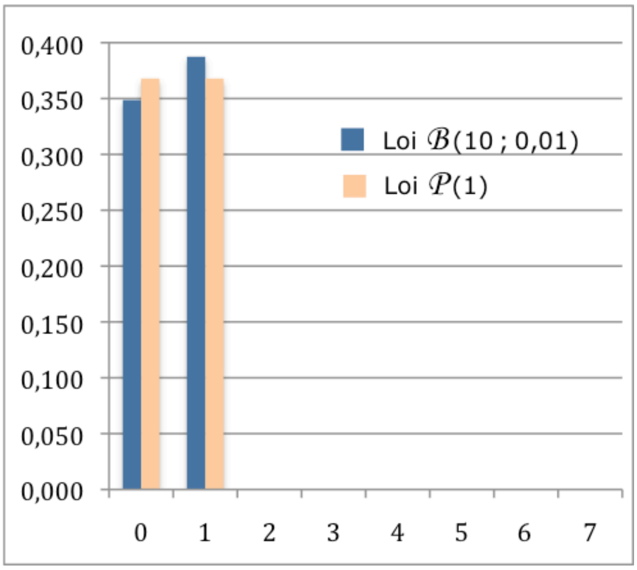
- d'une part, une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n\,;\dfrac{1}{n}\right)$ pour n égal à 10, 50, 100 et 1000 ;
- d'autre part la loi de Poisson de paramètre $\mu = 1$ qui approche ces lois binomiales.

Fonctions utiles : LOI.BINOMIALE(k;n;p;FAUX)
LOI.POISSON(k;1;FAUX)

Remarque : « FAUX » signifie qu'on ne cumule pas.

$\mathcal{B}$(10 ; 0,1)		$\mathcal{B}$(50 ; 0,02)		$\mathcal{B}$(100 ; 0,01)		$\mathcal{B}$(1000 ; 0,001)		$\mathcal{P}$(1)	
k	**P(X = k)**	**k**	**P(X = k)**	**k**	**P(X = k)**	**k**	**P(X = k)**	**k**	**P(X = k)**
0	0,349	0		0		0		0	0,3679
1	0,387	1		1		1		1	0,3679
2		2		2		2		2	
3		3		3		3		3	
4		4		4		4		4	
5		5		5		5		5	
6		6		6		6		6	
7		7		7		7		7	
8		8		8		8		8	
9		9		9		9		9	
10		10		10		10		10	

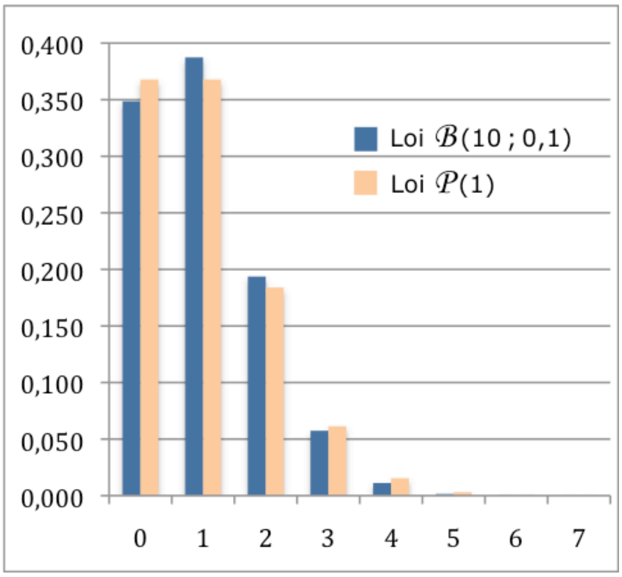
2. Faire quatre diagrammes en bâtons : sur chacun seront représentées une loi binomiale et la loi de Poisson $\mathcal{P}$(1).

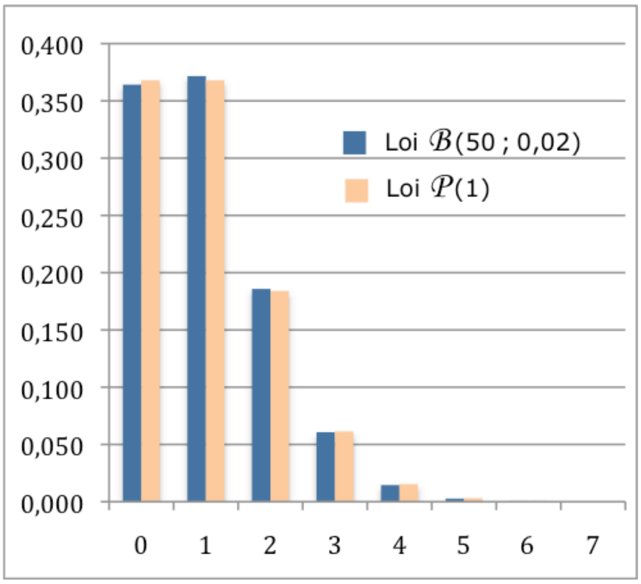


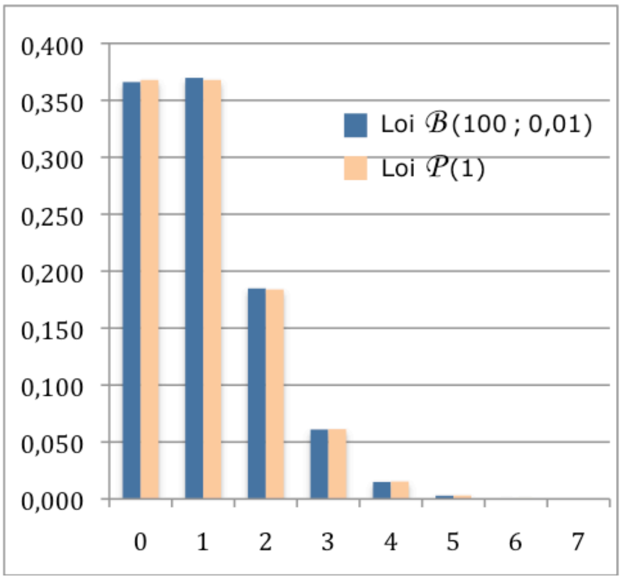
3. Que peut-on constater ?

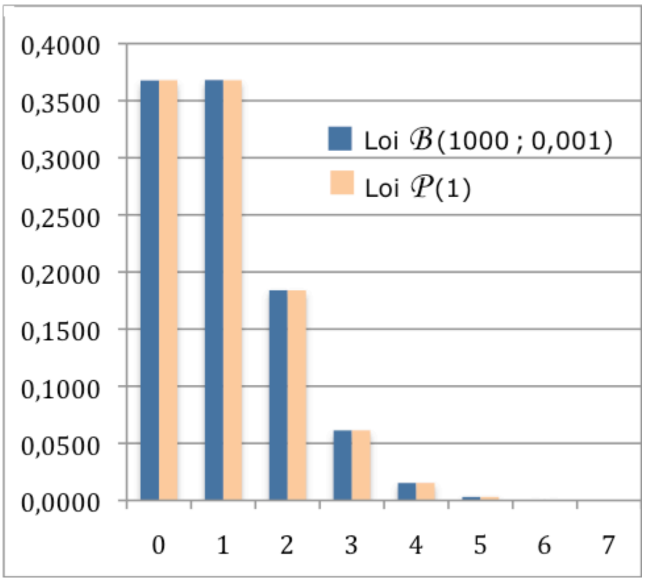
Correction :

$\mathcal{B}(10\,;\,0{,}1)$		$\mathcal{B}(50\,;\,0{,}02)$		$\mathcal{B}(100\,;\,0{,}01)$		$\mathcal{B}(1000\,;\,0{,}001)$		$\mathcal{P}(1)$	
k	**P(X = k)**	**k**	**P(X = k)**	**k**	**P(X = k)**	**k**	**P(X = k)**	**k**	**P(X = k)**
0	0,349	0	0,364	0	0,366	0	0,3677	0	0,3679
1	0,387	1	0,372	1	0,370	1	0,3681	1	0,3679
2	0,194	2	0,186	2	0,185	2	0,1840	2	0,1839
3	0,057	3	0,061	3	0,061	3	0,0613	3	0,0613
4	0,011	4	0,015	4	0,015	4	0,0153	4	0,0153
5	0,001	5	0,003	5	0,003	5	0,0030	5	0,0031
6	0,000	6	0,000	6	0,000	6	0,0005	6	0,0005
7	0,000	7	0,000	7	0,000	7	0,0001	7	0,0001
8	0,000	8	0,000	8	0,000	8	0,0000	8	0,0000
9	0,000	9	0,000	9	0,000	9	0,0000	9	0,0000
10	0,000	10	0,000	10	0,000	10	0,0000	10	0,0000









Démonstration :

On considère une variable aléatoire X_n qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n\,;\dfrac{1}{n}\right)$ et un entier k tel que $0 \le k \le n$.

On note $p_n(k) = \mathrm{P}(X_n = k) = \binom{n}{k}\left(\dfrac{1}{n}\right)^k\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n-k}$.

- <u>Calcul de la limite</u> de $p_n(0)$ <u>lorsque n tend vers $+\infty$</u>.

  $$p_n(0) = \mathrm{P}(X_n = 0) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{-\frac{\ln(1-1/n)}{-1/n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}.$$ On note p_0 cette limite.

- <u>Généralisation</u> : <u>calcul de la limite de</u> $p_n(k)$ <u>lorsque n tend vers $+\infty$</u>.

  - $p_n(k) = \mathrm{P}(X_n = k) = \binom{n}{k}\left(\dfrac{1}{n}\right)^k\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}\left(\dfrac{1}{n}\right)^k\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n-k}$

    $$p_n(k+1) = \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-k-1} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\times\frac{n-k}{k+1}\times\left(\frac{1}{n}\right)^k\times\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-k}\times\frac{n}{n-1}$$

    $$= p_n(k)\times\frac{n-k}{(k+1)(n-1)}$$

  - Si la suite $(p_n(k))$ converge vers une limite p_k lorsque n tend vers $+\infty$, alors la suite $(p_n(k+1))$ converge vers p_{k+1} et cette limite vérifie : $p_{k+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} p_n(k)\times\dfrac{n-k}{(k+1)(n-1)} = p_k\times\dfrac{1}{k+1}$

  - On montre (par récurrence) que $\boxed{p_k = e^{-1}\times\dfrac{1}{k!}}$

- <u>La suite</u> (p_k) <u>définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$</u> :

  $$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-1}\times\frac{1}{k!} = e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = e^{-1}\times e = 1$$

Remarque : si on veut faire la démonstration avec les étudiants, on peut admettre les deux résultats suivants :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = e$$