Produit scalaire dans l'espace

1 Produit scalaire dans le plan (rappels)

Le plan est muni d'un repère orthonormal.

1.1 Différentes expressions du produit scalaire

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$
2. Si $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
3. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$
4. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB)

Remarques.

1. Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires et de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \cdot AC$
3. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires et de sens contraire, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \cdot AC$
4. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \cos\left(\widehat{BAC}\right)$
5. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = ||\vec{u}||^2 = x^2 + y^2$: $\vec{u}^2$ est le carré scalaire de $\vec{u}$

Propriétés.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel k,

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

1.2 Produit scalaire et orthogonalité

Définition. Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs *orthogonaux* signifie que :

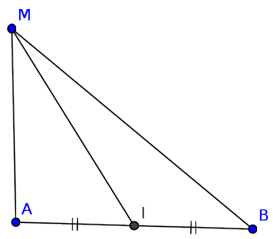
- soit $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$
- soit $(AB) \perp (AC)$ si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont non nuls

Propriété.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

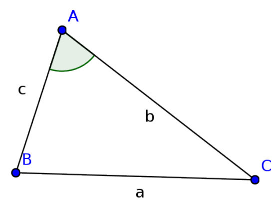
1.3 Applications du produit scalaire

- **Théorème de la médiane.**
  A et B sont deux points et I est le milieu du segment $[AB]$.
  Pour tout point M, on a $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$



- **Théorème d'Al Kashi.**
  Dans un triangle ABC, on a $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

- **Aire d'un triangle.**
  Dans un triangle ABC d'aire S, on a $S = \frac{1}{2}\sin\hat{A}$



- **Propriété des sinus.**
  Dans un triangle ABC, on a $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{b}{\sin\hat{C}}$