académie Clermont-Ferrand

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Rallye mathématique 2010

[13e edition] Auvergne

Voici donc, chers collégiens et lycéens d'Auvergne, les sujets que l'équipe d'organisation du Rallye vous a concoctés pour la phase qualificative de l'année 2010. Elle espère que vous prendrez autant de plaisir à les résoudre que vos prédécesseurs depuis 1998.

Vous allez être confrontés à différents domaines des mathématiques : arithmétique, géométrie, combinatoire, … Chacun d'entre vous, au sein de son équipe, devrait y trouver de quoi satisfaire ses goûts. Les connaissances et compétences de tous seront nécessaires pour venir à bout des difficultés que vous allez rencontrer mais, vous devez en être persuadés, le succès sera présent au bout de l'effort. Comme les années précédentes, il faudra faire preuve d'initiative, de persévérance, d'esprit d'équipe mais aussi, pour les plus créatifs d'entre vous, d'originalité et de sens artistique à travers la production de l'affiche qui vous est demandée.

Bon courage à tous !

Françoise Barachet,
IA-IPR en mathématiques

Jean-François Bilgot,
IA-IPR en mathématiques

Catherine Tison,
IEN en mathématiques-sciences

Contact

Anne Crouzier,
professeure de mathématiques,
membre de l'APMEP
anne.crouzier@ac-clermont.fr

… mars 2010

Epreuves interclasses troisièmes et secondes

Les consignes

- Les calculatrices sont autorisées.
- La solution de chacun des 4 problèmes communs et des 2 sujets correspondant au niveau de la classe sera rédigée sur une des feuilles jointes
- Chaque feuille portera :
  - le nom de la classe,
  - le nom de l'établissement,
  - le numéro du problème,
  - ainsi que l'effectif de la classe et des participants.
- Un des problèmes devra être illustré sur une affiche comportant le nom de la classe et de l'établissement.

  Le jury appréciera à la fois la qualité esthétique, l'originalité et la qualité des contenus mathématiques.
- Pour chaque problème, le jury évaluera :
  - l'exactitude de la (ou des) réponse(s) aux questions posées,
  - l'argumentation,
  - la présentation.

Rédaction : Jean-François Bilgot, Françoise Barachet, IA-IPR de mathématiques - Catherine Tison, IEN-ET mathématiques - sciences

Conception et réalisation : Service communication du rectorat - Impression : rectorat - .... ex

février 2010

Exercice 1 (niveau 3e)

Figures magiques

1. Carrés magiques

On écrit les nombres entiers naturels non nuls par ligne de dix.
On a ci-dessous les 10 premières lignes d'une grille infinie :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On appelle carré 3×3 toute portion de la grille telle que celle grisée, dans la partie représentée ou plus bas dans la grille infinie.

a) Dans le carré grisé, ajouter le nombre 25 (en haut à gauche) et le nombre 47 (en bas à droite). Faire de même avec les nombres 27 (en haut à droite) et 45 (en bas à gauche). Que constate-t-on ?

b) **Le résultat sera-t-il le même quel que soit le carré 3×3 choisi ? Justifier.**

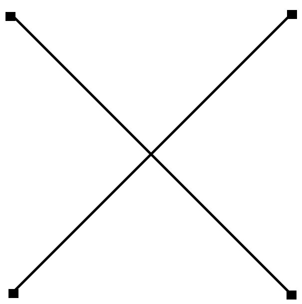
c) Choisir encore un autre carré 3×3. Cette fois-ci, ajouter le nombre du milieu dans la ligne du haut et le nombre du milieu dans la ligne du bas.

Puis ajouter le nombre du milieu dans la colonne de gauche et le nombre du milieu dans la colonne de droite.
Que constate-t-on ?

d) **Le résultat sera-t-il le même quel que soit le carré 3×3 choisi ? Justifier.**

2. Croix magiques

Dessiner une croix comme ci-dessous.



En haut de chaque branche de la croix, placer un nombre.

Au centre de la croix, placer la somme de ces deux nombres.

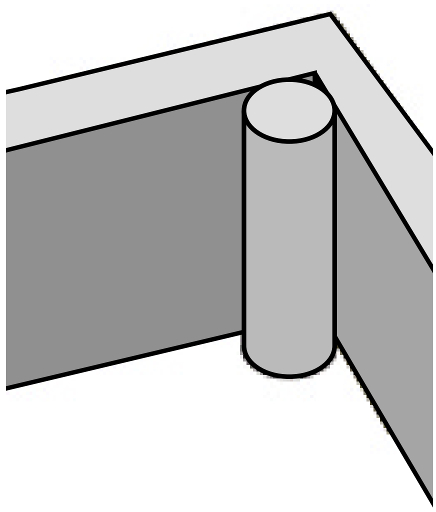
En bas de chaque branche, placer la somme des nombres sur cette branche.

Y a-t-il un lien entre la somme des nombres en bas de la croix et en haut de la croix ? Cela dépend-il des nombres choisis ?

Prouver les conjectures faites.

Exercice 2 (niveau 3e)

L'arachnophobe



Lors de la construction d'une maison, on plaque une descente de gouttière de 100 mm de diamètre à l'angle de deux murs d'une hauteur de 2,5 m, comme l'indique le schéma ci-contre.

Voyant une araignée se glisser entre la descente et le coin du mur, l'installateur se demande combien d'araignées pourraient cohabiter dans cet espace.

Sachant qu'une araignée a besoin d'un espace vital de 0,19 dm3, aider cet installateur à savoir combien d'araignées pourraient y faire leur nid.

Exercice 3 (niveau 2nde LP)

Boules au carré

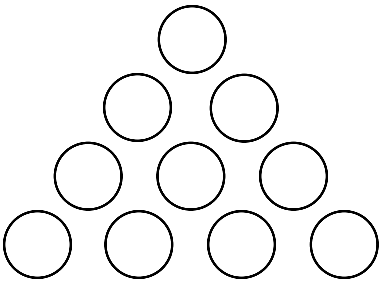
Pour organiser un tournoi de boules lyonnaises entre 18 équipes (ou quadrettes), on numérote les équipes de 1 à 18 suivant l'ordre de leur inscription ; on place dans un sac 18 jetons numérotés de 1 à 18 et on les tire successivement sans les remettre dans le sac : les deux premiers désignent les équipes qui joueront sur le terrain n°1, les deux suivants sur le terrain n°2 ... et, ainsi de suite jusqu'au terrain n°9.

Un mathématicien qui se trouve là par hasard constate que, sur chaque terrain, la somme des numéros des deux équipes est un carré parfait.

Reconstituer ces paires de numéros.

Exercice 4 (niveau 2nde LP)

Les pommes



On arrange 2 010 pommes en triangle, selon le schéma ci-dessous :

Au sommet (1ère ligne) : 1 pomme ;

2^{e} ligne : 2 pommes ;

3^{e} ligne : 3 pommes ;

4^{e} ligne : 4 pommes ; etc …

Combien y a-t-il de pommes sur la dernière ligne ?

Exercice 5 (niveau 2nde générale)

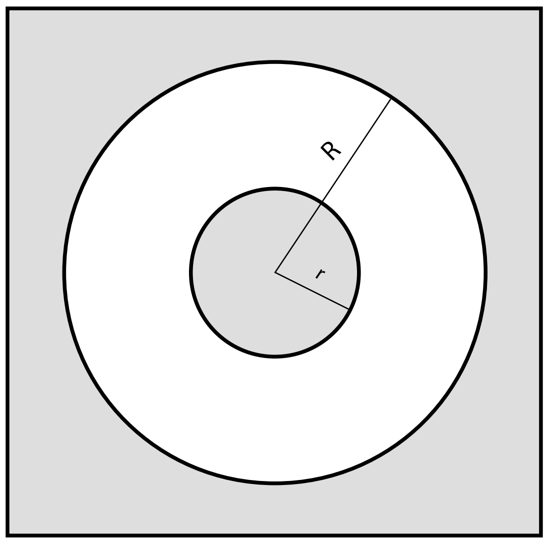
Le projecteur

Un projecteur est placé de façon à éclairer un écran qui a la forme d'un carré de 7 mètres de côté.

Initialement le projecteur forme sur l'écran un disque de lumière de 2 mètres de rayon et de même centre que l'écran.

On peut faire des réglages sur le projecteur pour modifier la valeur du rayon du disque de lumière : ainsi, à la place d'un disque de 2 mètres de rayon, on a un disque de R mètres de rayon avec $2 < R \leqslant 3{,}5$ mais avec une zone d'ombre qui est aussi un disque qui a le même centre que l'écran et de r mètres de rayon, comme l'indique la figure ci-contre.

Sachant que si la valeur de R correspond à une augmentation de t% par rapport à 2, alors la valeur de r est égale à t%×R, déterminer en fonction de R l'aire de la surface éclairée sur l'écran puis, avec l'aide de la calculatrice, pour quelle valeur de R cette surface est la plus grande.



Exercice 6 (niveau 2nde générale)

Triplet pythagoricien

Un triplet pythagoricien est un triplet de nombres entiers positifs (a ; b ; c) tels que le carré d'un des nombres est égal à la somme des carrés des deux autres nombres. Par exemple, (3 ; 4 ; 5) est un triplet pythagoricien car $5^2 = 4^2 + 3^2$.

> En 1678, E. Mariotte propose un algorithme pour trouver des triplets pythagoriciens :
> - prendre deux entiers (par exemple 2 et 3)
> - calculer la somme de leurs carrés (13), la différence de leurs carrés (5), et leur double produit (12)
> - ces trois nombres, 13, 5 et 12 forment un triplet pythagoricien.

a) Prouver que les trois nombres ci-dessus (5, 12 et 13) forment un triplet pythagoricien.

b) Tester la méthode de E. Mariotte en partant de deux autres nombres entiers.

c) Prouver que la méthode donne toujours un triplet pythagoricien quels que soient les nombres non égaux choisis au départ.

Exercice 7 (commun à tous les niveaux)
La calculatrice

Ma calculatrice ne possède que trois touches : $\boxed{\text{ON}}$, $\boxed{\text{A}}$ et $\boxed{\text{B}}$. L'écran n'affiche que des nombres entiers positifs ou nuls.

- La touche d'allumage, $\boxed{\text{ON}}$, affiche le nombre 0,
- la touche $\boxed{\text{A}}$ augmente de 1 le double du nombre visible à l'écran,
- Quant à la touche $\boxed{\text{B}}$, elle n'agit que si le nombre affiché est impair, en le remplaçant par sa demi-somme avec 5.

Ainsi par exemple, j'obtiens 4 avec la suite de touches $\boxed{\text{A}}\boxed{\text{A}}\boxed{\text{B}}$

J'allume ma calculatrice.

a) **Quel est le nombre obtenu avec la suite de touches : $\boxed{\text{A}}\boxed{\text{B}}\boxed{\text{A}}\boxed{\text{A}}\boxed{\text{A}}\boxed{\text{A}}$?**

b) **Est-ce que je peux obtenir 5 ?**

c) **Comment obtenir l'affichage de 100 avec la suite de touches la plus courte possible ?**

Exercice 8
Produit (commun à tous les niveaux)

Observer cette égalité : $34 \times 86 = 43 \times 68$. Les chiffres des facteurs des deux produits ont été permutés et on obtient le même résultat !

Trouver tous les produits de deux nombres à deux chiffres distincts, qui ont cette particularité.

Exercice 9 (commun à tous les niveaux)
Nouvelles plaques d'immatriculation

La nouvelle immatriculation française est entrée en vigueur le 15 avril 2009. Chaque véhicule possède désormais un numéro « à vie ».
Ce numéro est constitué de 7 caractères, avec une 1ère partie à deux lettres (bloc de gauche), une 2e partie (bloc central) à trois chiffres et une 3e partie (bloc de droite) à deux lettres.

La numérotation des véhicules se fait alors de manière séquentielle au niveau national de AA 001 AA à ZZ 999 ZZ.

Un identifiant territorial complète la plaque, il comprend un emblème régional surmontant le numéro du département inclus dans la région choisie, il est purement décoratif et n'entre pas en compte dans la numérotation.

1. **Calculer le nombre potentiel de numéros d'immatriculation autorisés par ce nouveau système.**

2. Réglementairement, des lettres ne sont jamais utilisées (I, O et U du fait de leur trop proche ressemblance avec 1, 0 et V) ainsi que la série SS. La série WW (réservée aux immatriculations provisoires) n'apparait jamais dans le bloc de gauche.
   Calculer alors le nombre de numéros d'immatriculation autorisés en tenant compte de ces exclusions.
3. **A raison de 3 millions de véhicules neufs par an, évaluer la durée de vie prévisible de ce nouveau système en arrondissant à l'année.**

Exercice 10 (commun à tous les niveaux)
De quoi j'ai l'aire ?

Étant donnée la figure ci-contre, comparer l'aire de la surface grisée à l'aire de la surface hachurée.