Rallye Mathématique d'Auvergne 2017

20e édition

Mardi 14 mars 2017

Épreuves interclasses troisièmes et secondes

À vous, maintenant, jeunes collégiens et lycéens d'Auvergne de faire preuve de vos qualités de réflexion, d'initiative, d'imagination !
Au sein de votre équipe, les connaissances et compétences de chacun seront nécessaires pour venir à bout des exercices originaux et astucieux que l'équipe d'élaboration des sujets vous a préparés.
Mais malgré les difficultés que vous allez rencontrer, vous devez en être persuadés, le succès est à votre portée !
Bon rallye 2017 !

Francoise Barachet,
IA-IPR Mathématiques

Jean-Alain Roddier,
IA-IPR Mathématiques

Jean-Jacques Seitz,
IA-IPR Mathématiques

Contact :
rallye.mathematique@ac-clermont.fr

Les consignes :

- Les calculatrices et les ordinateurs *sans accès internet* sont autorisés.
- Toute utilisation de l'outil informatique donnera lieu à l'envoi d'un fichier à l'adresse : rallye.mathematique@ac-clermont.fr sous le format classe_etablissement_numeroexercice.extensiondufichier (par exemple : 2eA_lyceeduval_4.xls ou 3e3_collegedubois_5.ggb)
- La solution de chacun des quatre problèmes communs et des deux problèmes correspondant au niveau de la classe sera rédigée sur une des feuilles jointes.
- Chaque feuille portera :
  — le nom de la classe ;
  — le nom de l'établissement ;
  — le numéro du problème ;
  — ainsi que l'effectif de la classe et des participants.
- Pour chaque problème, le jury évaluera :
  — l'exactitude de la (ou des) réponse(s)aux questions posées ;
  — l'argumentation ;
  — la présentation.
- Le jury appréciera à la fois la qualité esthétique, l'originalité et la qualité des contenus mathématiques.

Conception et Rédaction : IREM, APMEP.

Impression : rectorat.

Problèmes communs à tous les niveaux

1 La chaîne alimentaire

Dans une réserve de la savane africaine, chaque jour il se passe les choses suivantes dans l'ordre donné ci-dessous :

— chaque tigre tue une gazelle ;
— chaque gazelle tue un serpent ;
— chaque serpent tue un tigre.

À la fin du dixième jour dans la réserve, un vétérinaire constate qu'il reste seulement une gazelle et aucun autre animal.

Combien y avait-il d'animaux de chaque espèce au départ ?

2 Le meilleur tiers de code

Alice, Bob et Charlie décident de se créer un mot de passe commun. Ce mot de passe est de la forme CLCCLCLCCL, où :

— L est une lettre de l'alphabet ;
— C est un chiffre (de 0 à 9).

Pour protéger leur mot de passe, ils décident de le découper en trois, de telle sorte que si une personne malveillante connaissant la forme du code trouve deux des trois morceaux, il lui reste un maximum de possibilités de mots de passe à tester.

Expliquer quel serait le meilleur découpage possible avec le mot de passe ci-dessous :

6	R	3	2	A	0	L	1	7	Y

Exemple

Pour un mot de passe de la forme LLLCCC, chacun connait une lettre et un chiffre, soit $26 \times 10 = 260$ possibilités. Voici donc deux découpages possibles :

M	A	T	0	6	3

$\longrightarrow$

M	A	T	0	6	3

ou

M	A	T	0	6	3

3 Two cylinders with one paper

An A4 sheet can be bent to make a cylinder in two different ways, either widthways or lengthways. Which cylinder has the greatest volume, assuming the length is greater than the width?

4 Un peu de logique

Le Père Noël est bien embêté. Quelques lutins facétieux lui ont dérobé et caché son superbe costume vert (le Père Noël est daltonien, chut !). Par recoupement, il est parvenu à déterminer que son costume est caché dans une des trois boites différentes : A, B ou C. Seulement, ces trois boites sont gardées par trois lutins qui interdisent à leur patron d'en choisir plus d'une.

> — Pour vous aider, Ô grand barbu bedonnant bonhomme, disent-ils, nous acceptons de vous donner chacun une information. Seul celui d'entre nous qui garde la boite contenant le costume dira la vérité. Les deux autres mentiront.
>
> — Le costume n'est pas dans la boite B, dit le lutin gardant la boite A.
>
> — Le costume n'est pas dans la boite A, dit le lutin gardant la boite B.
>
> — Le costume n'est pas dans la boite A, dit le lutin gardant la boite C.

1. **Le Père Noël, après quelques instants de réflexion, récupère son costume... Sauriez-vous dire, et expliquer, dans quelle boite il était ?**

Mais voilà qu'il s'aperçoit qu'on lui a aussi enlevé son nœud papillon. Certes, personne ne fait très attention à ce nœud, habituellement dissimulé sous sa barbe, mais cela le turlupine quand même.

> — Nous reprenons le même système ! disent les lutins, espérant que leur énigme fera plus long feu que la précédente.
>
> — Le nœud papillon est dans la boite B, dit le lutin qui garde la boite A.
>
> — Point du tout. Le nœud papillon est dans la boite A, dit le lutin qui garde la boite B.
>
> — ... dit le lutin qui garde la boite C. *(En fait, il s'est enrhumé en allant nourrir les rennes, et du coup, n'a plus de voix.)*

2. **Peine de Lutins perdue ! Le père Noël s'en tire comme avant... Et vous, sauriez-vous, comme le Père Noël, trouver le nœud papillon ?**

Le lendemain matin, alors que Noël approche, le Père Noël s'aperçoit que ce sont ses bottes qui ont disparu. Cette fois-ci, les lutins avouent spontanément et proposent quatre boites. Deux d'entre elles contiennent une botte, et les lutins qui les surveillent vont dire la vérité. Deux d'entre elles sont vides, et les lutins qui les gardent vont mentir systématiquement. Chacun des lutins va donner les états, vides ou pleines, de une, deux ou trois boites.

> — Ça ne marchera pas ! dit le Père Noël, passablement furieux. Avec ce système, je ne pourrai jamais deviner où se trouvent mes bottes. Faites autrement !

Il a raison le Père Noël. Et puis c'est vrai que ces jeux, ça commence à bien faire à la fin. Bon, en même temps, les jeux, c'est un peu son gagne-pain ! Mais quand même...

3. **Et au fait, pourquoi prétend-il cela ? Pouvez-vous expliquer pourquoi il a raison ?**

Le Père Noël, à son tour décide de jouer :

> — Un des rennes, dit-il, cache sous son harnais les clés du traineau. Pour que vous, petits lutins, puissiez faire un tour en traineau, voici ce que je vous propose : deux rennes sont menteurs et un, celui qui a la clé, est véridique.
>
> — C pourrait vous dire que B a la clé, déclare le renne A.
>
> — A pourrait vous dire que B a la clé, déclare le renne B.
>
> — B pourrait vous dire que A a la clé, déclare le renne C.
>
> — Que faites-vous, petits lutins ? demande le Père Noël assez content de lui. Les lutins se grattent le bonnet.

4. **Mais sans doute avez-vous déjà une idée. Alors, où se trouve la clé, et pourquoi ?**

Problèmes niveau collège

5 Le mathémagicien

Un magicien décide de proposer un tour à un écureuil :

— Cher participant, avez-vous un chiffre porte-bonheur ? demande le magicien.

— Oui, c'est sept ! dit l'écureuil.

— Voici un tas de noisettes. *(Le magicien fait mine de sortir au hasard des noisettes mais en réalité il y en a neuf.)* Sans me le montrer, mettez une partie des noisettes dans votre main droite et le reste dans votre main gauche. Multipliez le nombre de noisettes de votre main droite par votre chiffre porte-bonheur et multipliez le nombre de noisettes de votre main gauche par le nombre entier précédant votre chiffre porte-bonheur ! Maintenant, additionnez vos deux produits ! C'est bon ? Vous avez le résultat final ?

— Oui, j'ai trouvé soixante, répondit l'écureuil.

C'est alors que le magicien s'exclame :

— Par la force des noisettes magiques, je devine que vous avez six noisettes dans votre main droite et trois dans votre main gauche !

— C'est exact ! dit l'écureuil. Mais comment avez-vous fait ?

1. **Pouvez-vous éclairer l'écureuil en expliquant comment le magicien a trouvé le nombre de noisettes dans chaque main ?**
2. **Si le candidat a pour chiffre porte bonheur 5 et qu'il annonce 37, pourriez-vous retrouver le nombre de noisettes dans sa main droite ainsi que le nombre de noisettes dans sa main gauche ?**

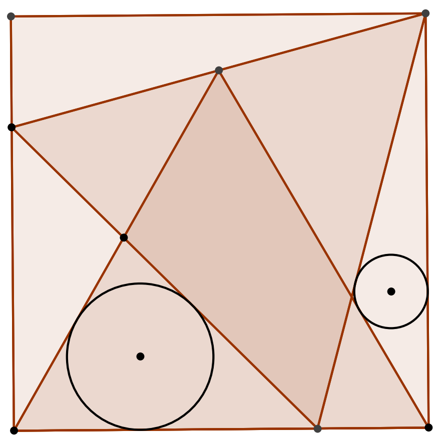
6 Construction géométrique

Réaliser à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique la construction ci-dessous.

La figure est composée d'un carré, de deux grands triangles équilatéraux et de deux cercles tangents à un côté de chacun des triangles équilatéraux et à un côté du carré.

Attention, les propriétés de la figure ne doivent pas être perdues quand on déplace l'un des sommets du carré.

Certaines longueurs sont dans un rapport entier. Lesquelles ?



Problèmes niveau lycée

7 Poussières de figures

Partons d'une figure, par exemple, un triangle équilatéral, et appliquons-lui une transformation qui consiste à le remplacer par trois triangles plus petits :

Transformation :

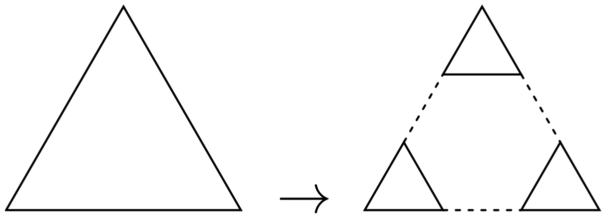


figure de départ étape 1

Si l'on applique à nouveau cette transformation aux trois petits triangles, on obtient une figure formée de neuf triangles encore plus petits. Et si l'on continue un grand nombre de fois, on ne voit plus qu'une « poussière » composée de points dispersés comme sur la figure ci-dessous :

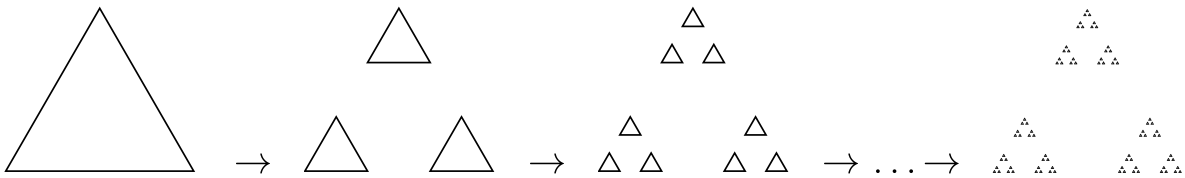


figure de départ étape 1 étape 2

Première question

La figure de départ ci-dessous est un triangle rectangle obtenu en prenant la moitié d'un triangle équilatéral d'un côté 20 cm.

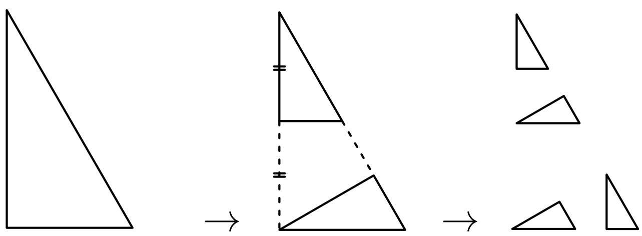


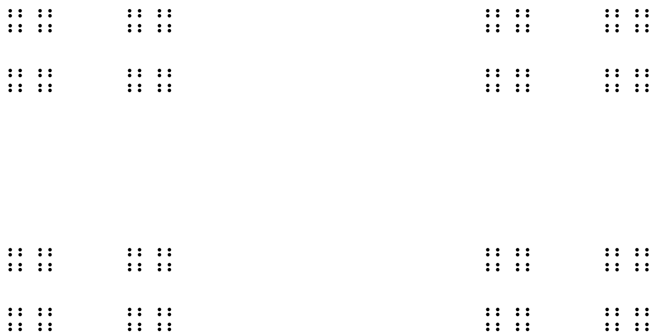
figure de départ étape 1 étape 2

Tracer sur une feuille blanche, le plus précisément possible, la figure correspondant à l'étape 3.

Deuxième question

Dans cette question, on propose une poussière. Tracer sur une feuille blanche la transformation qui permet d'obtenir cette poussière (il suffit de tracer la figure initiale et l'étape 1).

Poussière :



8 Construction géométrique

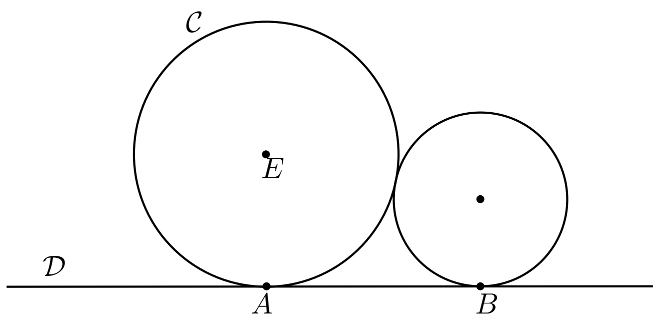
À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, effectuer la construction suivante :

D est une droite donnée. A et B sont deux points distincts de D. $\mathcal{C}$ est un cercle de centre E, tangent à la droite D en A.

Construire le cercle tangent à la droite D en B et tangent au cercle $\mathcal{C}$.

Les points A, B et E doivent pouvoir être déplacés indépendamment tout en conservant les propriétés de la figure.

Justifier la méthode de construction utilisée. Que se passe-t-il si A et B sont confondus ?



Organisateurs

Académie de Clermont-Ferrand, APMEP, IREM.

Nos partenaires

CIJM, CNRS, Conseil général du Cantal, Cournon, Saint-Flour, UCA, Volvic.