TD 13 : Probabilités conditionnelles – Indépendance

Objectifs : Utiliser un arbre pondéré pour représenter une situation et déterminer des probabilités.
Connaître la notion d'indépendance ;

__Enoncé 1__ : Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel :
les ingénieurs ; les opérateurs de production ; les agents de maintenance.
Il y a 8% d'ingénieurs et 82 %d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50 %des ingénieurs, 25 % des agents de maintenance et 60 % des opérateurs de production.

Partie A : Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise.

On note :
- M l'évènement : « le personnel interrogé est un agent de maintenance » ;
- O l'évènement : « le personnel interrogé est un opérateur de production » ;
- I l'évènement : « le personnel interrogé est un ingénieur » ;
- F l'évènement : « le personnel interrogé est une femme ».

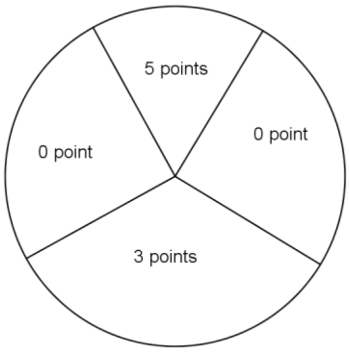
1. Construire un arbre pondéré correspondant aux données.
2. Calculer la probabilité d'interroger :
   a) un agent de maintenance ;
   b) une femme agent de maintenance ;
   c) une femme.

Partie B : Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue ; des études ont montré que sur une journée :
- la probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,002 ;
- la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0,003 ;
- la probabilité qu'une panne se produise est égale à 0,04.

On note :
- A l'évènement : « l'alarme se déclenche » ;
- B l'évènement : « une panne se produit » ;

1. Démontrer que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,037.
2. Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

__Enoncé 2__ : Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-contre.
On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.



1. Le joueur lance une fléchette.
   On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point ; p_3 la probabilité d'obtenir 3 points et p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.
   Sachant que $p_5 = \frac{1}{2}p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3}p_0$; déterminer les valeurs de p_0, p_3 et p_5.
2. Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.
   On note G_2 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».
   On note G_3 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».
   On note P l'évènement : « le joueur perd la partie ».
   a) Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p(G_2) = \frac{5}{36}$. On admettra dans la suite que $p(G_3) = \frac{7}{36}$.
   b) En déduire $p(P)$.
3. Pour une partie, la mise est fixée à 2 €. Si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 5 €. S'il gagne en trois lancers, il reçoit 3 €. S'il perd, il ne reçoit rien.
   On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie.
   a) Donner la loi de probabilité de X.
   b) Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Enoncé 3 : Un employé se rend à son travail. S'il est à l'heure il prend le bus de ramassage gratuit mis à sa disposition par l'entreprise, s'il est en retard il prend le bus de la ville et il lui en coûte 1,50 €.

Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$, s'il est en retard un jour donné la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on appelle R_n, l'événement : « l'employé est en retard le jour n ».

On note p_n, la probabilité de R_n et q_n, celle de $\overline{R_n}$. On suppose que $p_1 = 0$.

1. a) Que représentent les probabilités $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{20}$ traduites dans l'énoncé ?

   b) Déterminer $p(R_{n+1} \cap R_n)$ en fonction de p_n et $p(R_{n+1} \cap \overline{R_n})$ en fonction de q_n.

   c) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et q_n.

   d) En déduire que : $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n$

2. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $v_n = p_n - \frac{4}{23}$.

   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$.

   b) Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.

   c) En déduire la limite de la suite (p_n).

Enoncé 4 : On tire une carte au hasard dans un jeu de trente-deux cartes.

X est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la carte tirée est une dame, 0 dans le cas contraire.
Y est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la carte tirée est un coeur, 0 dans le cas contraire.

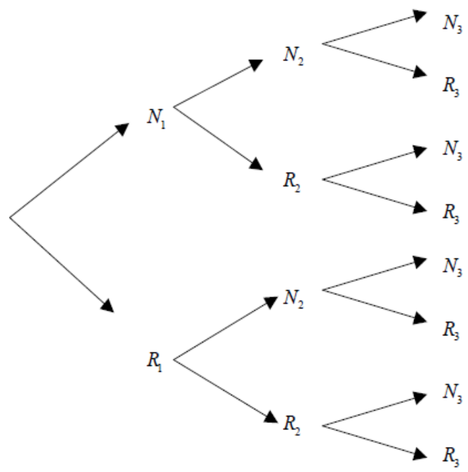
1. Déterminez la loi de X, puis la loi de Y.
2. Calculez les probabilités des événements suivants :
   a) « La carte est la dame de cœur »
   b) « La carte est une dame qui n'est pas de cœur »
   c) « La carte est un cœur qui n'est pas une dame »
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Autres exercices

Exercice 1 : On considère trois urnes U_1; U_2 et U_3 :

- L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges.
- L'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges.
- L'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 puis une boule de U_2, à les mettre dans U_3 puis à tirer au hasard une boule de U_3. Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i (respectivement R_i) l'événement « on tire une boule noire de U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de U_i »).



1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :
2. a) Calculer la probabilité des événements
   $$N_1 \cap N_2 \cap N_3 \quad \text{et} \quad N_1 \cap R_2 \cap N_3.$$
   b) En déduire la probabilité de l'événement $N_1 \cap N_3$.
   c) Calculer de façon analogue la probabilité de l'événement $R_1 \cap N_3$.
3. Déduire de la question précédente la probabilité de l'événement N_3.
4. Les événements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?
5. Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

Exercice 2 : Test de dépistage

Un test a été mis au point pour le dépistage d'une maladie. Le test doit être positif si l'individu est malade et négatif sinon. Le laboratoire fabricant le test fournit les caractéristiques suivantes :

la probabilité qu'un test soit positif sachant que l'individu est malade est de 0,99 ;
la probabilité qu'un test soit négatif sachant que l'individu est sain est de 0,99.

On s'intéresse à une population « cible » dans laquelle on procède à un test de dépistage systématique.
Un individu est choisi au hasard dans la population cible.
On note M l'événement « l'individu est atteint de la maladie » et T l'événement « le test est positif ».

1. Etude d'un cas particulier
   On suppose que la maladie touche 10% de la population cible.
   a) Illustrer la situation par un arbre pondéré.
   b) Quelle est la probabilité qu'un individu ait un test positif ?
   c) Déterminer la probabilité qu'un individu soit malade sachant que le test est positif (cette valeur s'appelle valeur prédictive du test)
2. Cas général
   On suppose que la proportion d'individus malades dans la population est x avec $0 < x < 1$.
   a) Montrer que la valeur prédictive est donnée sur]0 ; 1[par la formule $v(x) = \dfrac{99x}{98x+1}$
   b) Représenter v en fonction de x sur l'écran d'une calculatrice : que peut-on dire de la valeur prédictive du test pour les maladies « rares », c'est-à-dire quand x est proche de 0 ? Interpréter ce résultat.
3. Maladie rare
   On s'intéresse maintenant à une population dans laquelle la maladie étudiée est « rare » : $x = 0{,}001$.
   a) Calculer la valeur prédictive.
   b) Calculer la probabilité, pour un individu d'être un « faux positif » c'est-à-dire la probabilité pour un individu dont le test est positif, de ne pas être malade.
   c) Pourquoi ne met-on pas en place un tel dépistage pour des maladies rares ?
4. Population dite « à risque »
   La population est constituée d'individus présentant des symptomes évocateurs de la maladie : $x = 0{,}7$.
   Calculer $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{M})$, $p_{\mathrm{T}}(\overline{\mathrm{M}})$, $p_{\overline{\mathrm{T}}}(\mathrm{M})$, $p_{\overline{\mathrm{T}}}(\overline{\mathrm{M}})$.
   Le test est-il un bon indicateur de la positivité de la maladie ?