TD 2 : Nombres complexes (forme algébrique)

Objectifs :

- savoir utiliser la forme algébrique d'un nombre complexe ;
- savoir résoudre des équations dans $\mathbb{C}$.

Enoncé 1 : Calculer les puissances de i.

1. Calculer i^0, i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7 , i^8, i^{132}, i^{133}, i^{134} et i^{135}.
2. a) Démontrer que si l'entier naturel non nul n est multiple de 4 (c'est-à-dire de la forme $n = 4p$ avec p entier), alors $i^n = 1$.

   b) Déterminer i^n suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n.

Enoncé 2 : Utiliser les nombres complexes dans une configuration géométrique.

Dans le plan complexe, 3 + i, 2 – 2i, 2i et 1 + 5i sont les affixes respectives de A, B, C et D.

1. Dessiner une figure
2. Prouver de deux façons différentes que ABCD est un parallélogramme.

Enoncé 3 : Utiliser les propriétés des opérations sur les nombres conjugués.

P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$.

1. Démontrer que pour tout complexe z, $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$
2. Vérifier que 1 + i est une racine de P. Déduire de la question 1. une autre racine complexe de P.
3. Résoudre l'équation $P(z) = 0$

Remarque : l'égalité $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$ *est vérifiée par les polynômes à coefficients réels.*

Enoncé 4 : Savoir résoudre une équation du 1^er^ degré d'inconnue z. (*la méthode est la même que dans* $\mathbb{R}$)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $(2 - i)z + i(z - 1) = (3 + 2i)z - 5$ b) $\dfrac{(2+i)z}{1-i} = \dfrac{1-i}{2+3i}$ c) $\dfrac{iz}{z-1} = 2z$

Enoncé 5 : Savoir résoudre une équation d'inconnue z et $\overline{z}$

(*on ne sait pas résoudre directement une équation où interviennent en même temps z et* $\overline{z}$. *On va donc transformer z en x + iy et résoudre un système de deux équations à deux inconnues dans* $\mathbb{R}$)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $2z - 3i\overline{z} - 1 = 0$ b) $(2 + i)z + (1 - 3i)\overline{z} = -1 + 2i$ c) $z\overline{z} + i(z+1) + \overline{z} = 0$

Enoncé 6 : Savoir déterminer des ensembles de points.

Déterminer par deux méthodes, l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $Z = (z - 1)(\overline{z} + 2i)$ soit

a) réel b) imaginaire pur

- <u>*avec la forme algébrique*</u>

<u>*Etape 1 :*</u> *on détermine la forme algébrique du complexe Z (cet exercice est parfois un peu long et il faut prendre garde de ne pas se tromper dans les calculs !) on obtient : Z = Ré(Z) + i Im(Z)*

<u>*Etape 2*</u> *: On traduit ce qu'on nous demande ; à savoir : Z est réel ⇔ Im(Z) = 0*
Z est imaginaire pur ⇔ Ré(Z) = 0

- <u>*avec les conjugués*</u>

On utilise pour cela les propriétés des conjugués, à savoir :

Z est réel ⇔ $\overline{Z} = Z$; *Z est imaginaire pur ⇔* $\overline{Z} = -Z$

D'autre part : $z + \overline{z} = 2\,Ré(z) = 2x$; $z - \overline{z} = 2i\,Im(z) = 2iy$ *et* $z\overline{z} = x^2 + y^2$

<u>A retenir :</u>

- L'ensemble des points M(x ; y) dont les coordonnées vérifient une équation du type : $ax + by + c = 0$ représente une droite
- L'ensemble des points M(x ; y) dont les coordonnées vérifient une équation du type : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ est le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R