Une prévision tirée d'une loi n'est que probable car le hasard existe …
La probabilité (en tant que prévision) se calcule comme si demain était comme hier .

Aperçu de l'histoire du calcul des probabilités

I- Introduction

La notion de « probabilité » s'est construite au fil du temps à partir du XVIIème siècle et la théorie mathématique liée a évolué et évolue toujours face aux problèmes épistémologiques des applications.

II- Une approche à priori fondée sur les jeux de hasard.
Correspondance entre Pascal et Fermat, deuxième moitié du XVIIième siècle.

Traditionnellement, on fait remonter l'histoire du calcul des probabilités en math à l'échange de correspondance entre **Pascal et Fermat en 1654** à propos du problème des partis (problèmes de jeux de hasard). D'après Pascal, le calcul des probabilités c'est la *géométrie du hasard* : « ainsi, joignant la rigueur des démonstrations de la science à l'incertitude du sort et conciliant ces deux choses en apparence contradictoires, elle peut , tirant son nom des deux, s'arroger à bon droit ce titre stupéfiant de géométrie du hasard ».
L'idée est de « mesurer » le hasard grâce à la notion **d'équiprobabilité à priori**, « le hasard est égal » pour le partage des pistoles.
Le calcul est ainsi basé sur la formule : nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles obtenus par dénombrement dans un dispositif expérimental identifié à l'avance (modèles de jeux , etc …).

<u>Document 1</u>

LETTRE DE PASCAL À FERMAT DU 29 JUILLET 1654
Varia Opera Mathematica D. Petri de Fermat (Toulouse 1679) pp. 179-183
Oeuvres de Blaise Pascal, G.E., pp. 381-393

Monsieur,

L'impatience me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse : j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous.

J'admire bien davantage la méthode des parties que celle des dés; j'avois vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le chevalier de Méré, qui est celui qui m'a proposé ces questions, et aussi M. de Roberval : mais M. de Méré n'avoit jamais pu trouver la juste valeurs des parties ni de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvois seul qui eûsse connu cette proportion.

Votre méthode est très sûre et est celle qui m'est la première venue à la pensée dans cette recherche; mais, parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ai trouvé un abrégé et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrois vous pouvoir dire ici en peu de mots : car je voudrois désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvoit, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris.

Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu :

Posons que le premier en ait deux et l'autre une; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir 64 pistoles; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir chacun 32 pistoles.

Considérez donc, Monsieur, que, si le premier gagne, il lui appartient 64; s'il perd, il lui appartient 32. Donc, s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : "Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez, le hasard est égal. Partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela mes 32 qui me sont sûres". Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.

Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura deux parties et l'autre une.

Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient, à celui qui a les deux parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : "Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 : donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines, au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par la moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous les gagniez comme moi". Ainsi il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles. Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie et l'autre point. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura deux parties à point, et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56; s'il la perd, ils sont partie à partie : donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : "Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié. De 56 ôtez 32, reste 24; partagez donc 24 par la moitié, prenez-en 12 et moi 12, qui, avec 32, font 44".

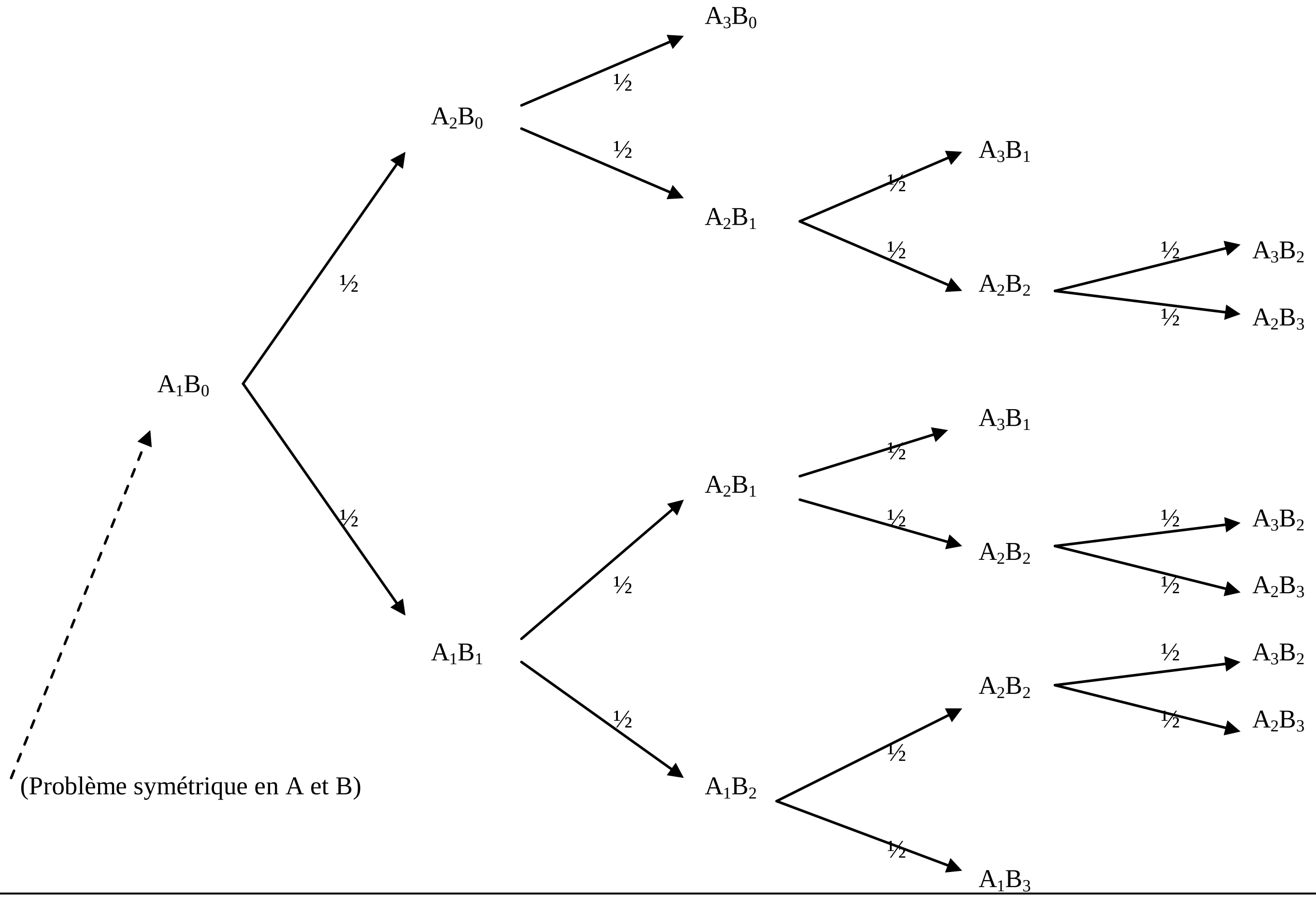
Or, par ce moyen, vous voyez, par les simples soustractions, que, pour la première partie, il appartient sur l'argent de l'autre 12 pistoles; pour la seconde, autres 12; et pour la dernière 8.

Commentaire : *L'idée de Pascal repose sur l'idée de faire comme si la partie était jouée jusqu'au bout*

Fermat, lui, utilise la méthode des combinaisons, en se ramenant au nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles avec des parties fictives qui se continuent même quand l'un des deux joueurs a gagné !

Dans un cours actuel de première S, retrouver le partage des pistoles n'est plus qu'un calcul de probabilité dans une situation d'équiprobabilité qui peut s'effectuer à l'aide de l'arbre ci-contre suivi du calcul de l'espérance mathématique.

On considère que les deux joueurs sont A et B et que le nombre de parties gagnées est en indice.
Ainsi, l'évènement A_1B_2 correspond à : « A a gagné une partie et B a gagné deux parties »



1) **Si « le premier en ait deux et l'autre une »** , on est dans le cas : A_2B_1 .
La probabilité qu'à A de gagner sous la condition A_2B_1 est d'après l'arbre :
½ + ½ x ½ = ¾
Et toujours sous la même condition, la probabilité que B gagne est : ¼
On en déduit l'espérance de gain pour A sur les 64 pistoles du début est de : : ¾ x 64 = 48 pistoles
et pour B : : ¼ x 64 = 18 pistoles

Gain pour A	0	64
probabilité	1/4	3/4

2) **Si « le premier a deux parties et l'autre point » ,** on est dans le cas : A_2B_0 .
La probabilité qu'à A de gagner sous la condition A_2B_0 est d'après l'arbre :
: ½ + ½ x ½ + ½ x ½ x ½ = 7/8
Et toujours sous la même condition , la probabilité que B gagne est : 1/8
On en déduit l'espérance de gain pour A sur les 64 pistoles du début est de : 7/8 x 64 = 56 pistoles
et pour B : 1/8 x 64 = 8 pistoles

Gain pour A	0	64
probabilité	1/8	7/8

3) **Enfin, si « le premier a une partie et l'autre point »** , on est dans le cas : A_1B_0 .
La probabilité qu'à A de gagner sous la condition A_1B_0 est d'après l'arbre :
½ x ½ + ½ x ½ x ½ + ½ x ½ x ½ x ½ + ½ x ½ x ½ + ½ x ½ x ½ x ½ + ½ x ½ x ½ x ½ =
7/16 + 1/4 = 11/16
Et toujours sous la même condition , la probabilité que B gagne est : 5/16
On en déduit l'espérance de gain pour A sur les 64 pistoles du début est de : 11/16 x 64 = 44 pistoles
et pour B : 5/16 x 64 = 20 pistoles

Gain pour A	0	64
probabilité	5/16	11/16

Attention : « La vérité est la même à Toulouse et à Paris ». Pascal se place dans un point de vue de juriste et de droit des affaires tels qu'ils apparaissent justement au XVIIième siècle (les pistoles qui me sont dues) mais il ne faut pas confondre « vérité » et « équité » … d'autres partages sont possibles (Pascal ne donne pas trop la parole au perdant !). C'est une loi volontaire s'ils veulent rompre de « gré à gré ».

Ce que l'on peut dire aujourd'hui, c'est que le calcul de Pascal correspond au calcul de l'espérance mathématique c'est-à-dire ce que le joueur peut espérer gagner en moyenne sur un grand nombre de fin de parties jouées réalisées de façons identiques et indépendantes … mais sur une seule partie ?

Ce type d'échange de lettre entre mathématiciens a permis l'essor des probabilités mais aussi de façon générale, des mathématiques en les sortant d'un milieu très fermé où le secret est de mise au XVième - XVIème et des traités de mathématiques commerciales. Les mathématiciens de l'époque qui ne sont pas des mathématiciens professionnels se lancent des défis, ensuite plusieurs donnent « leur » solution, ce qui fait avancer l'élaboration de la notion et sa généralisation. Ils ont conscience que ce ne sont que des cas d'école mais qu'il y a tout à construire et à défricher, donc vont travailler sur des jeux de plus en plus compliqués et des exercices pseudo- concrets se ramenant à des jeux en vue d'une possible application.

III- Une approche à postériori : Bernouilli et la loi des grands nombres (autour de 1700)

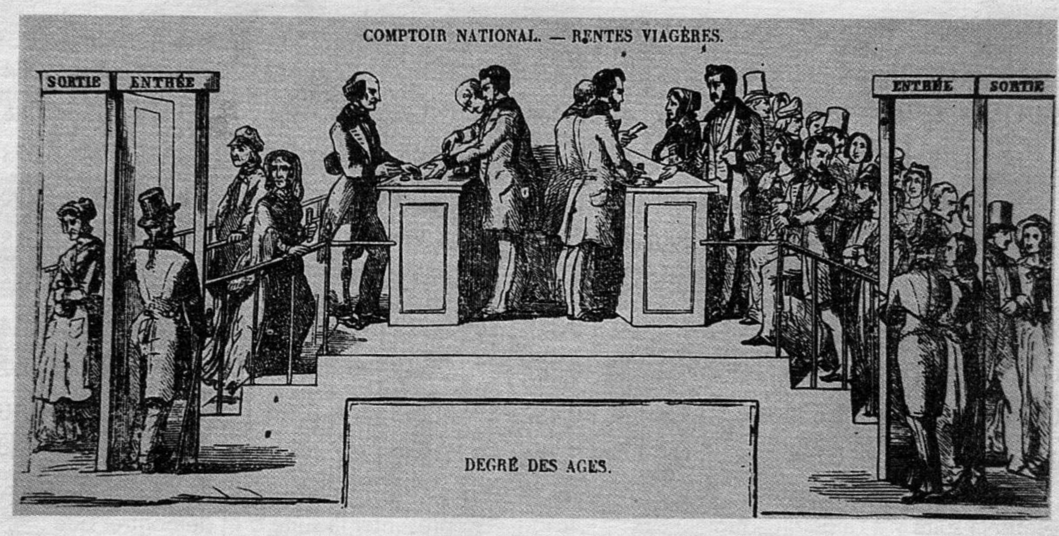
- **Bernoulli** constate que les calculs précédents ne peuvent s'appliquer qu'à des situations aléatoires simples telles que les jeux de hasard, mais exclut toute application réelle aux phénomènes naturels complexes (apparition de maladies , météo etc …). Il développera une autre approche du calcul des probabilités : c'est l'**approche fréquentiste** après observation d'un grand nombre d'expériences semblables. Il justifie **l'assimilation probabilité – fréquence par « la loi des grands nombres »** en démontrant que la fréquence expérimentale d'une issue possible, dans une expérience aléatoire répétée, peut être aussi proche que l'on veut de sa probabilité théorique, déterminée à priori lorsque cela est possible.

Cette notion de **probabilité définie à posteriori** sera utilisée à l'époque pour des prévisions économiques (impact des guerres, assurances des bateaux qui partaient naviguer au loin, calcul de rentes viagères etc …)

La difficulté réside alors dans l'estimation d'une probabilité théorique par une étude statistique et non dans le calcul à priori des probabilités élémentaires.

<u>Document 2</u> : Tables de mortalité et espérance de vie

Au XVII^e siècle, des problèmes concernant notamment l'assurance des transports maritimes ou le calcul des rentes viagères ont conduit plusieurs scientifiques (Graunt, Huygens, Halley, Leibniz…) à établir des **tables de mortalité**. On considère un groupe social donné, caractérisé par exemple par une région géographique, un mode de vie, une catégorie socioprofessionnelle etc., dans lequel on distingue en général les hommes et les femmes, et pour chaque individu décédé de ce groupe on relève dans les registres paroissiaux l'âge au décès (autrement dit la durée de vie). On obtient ainsi pour chaque tranche d'âge une fréquence de décès, qui permet d'estimer la probabilité de décès concernant les individus actuels du même groupe social. Cela permet notamment d'évaluer l'**espérance de vie** à un âge donné.



« Dans le groupe de droite nous voyons vingt personnes qui nous représentent les vingt millions de personnes dans la force de l'âge et les cinq de gauche nous représentent les cinq millions qui viennent de recevoir ce que les vingt millions ont versé le dimanche. […] Ceux qui ont vingt ans payeraient 1 fr. de contribution par semaine jusqu'à cinquante ans, et après cet âge ils recevraient la part de la contribution des vingt millions de fr. qui seront déposés tous les dimanches avant midi de sorte que les cinq millions qui ont passé cinquante ans auront une rente viagère pour la première année de 208 fr. chaque personne. »

Aujourd'hui les tables de mortalité , régulièrement actualisées par l'INSEE , sont très utiles non seulement pour permettre aux compagnies d'assurance d'ajuster leurs primes d'assurance-vie ou d'assurance- décès , mais aussi pour mettre en évidence des inégalités entre catégories sociales, ou des évolutions au sein de certaines catégories.

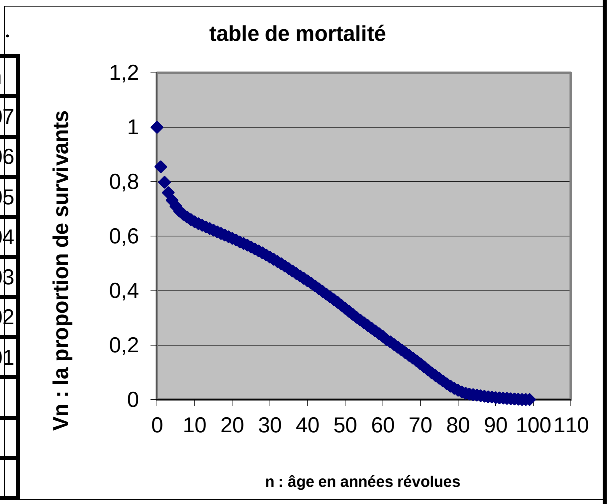
Au début du XVIIIème siècle, l'astronome anglais Edmund Halley publie la table de mortalité suivante, relative aux habitants de la ville de Breslau en Prusse Orientale. Il a choisi cette ville car il y a peu d'échange avec l'extérieur, sa population est stable dans le temps … Mais attention à ne pas confondre une étude statistique et une étude probabiliste, les problèmes ne sont pas les mêmes. Les calculs statistiques sur les impôts, la mortalité, les récoltes, les maladies, etc … sont encouragés par les gouvernements, comme moyens d'observation, pour combiner les résultats et aider à la décision (avec les difficultés d'emploi liées aux indicateurs choisis). Le calcul probabiliste, lui, est sensé donner des moyens d'extrapolation et de prévision.

Pour que les valeurs puissent être étendues à la population de la Prusse en entier (… et du monde ?), Halley a essayé de s'approcher des critères de la loi de Bernoulli. Prendre au hasard un habitant de Breslau au XVIIIième siècle ne sert à rien, mais il faudra de toute façon changer l'univers …

Parallèlement, les frères Huygens (mathématiciens hollandais) s'amusèrent à prendre les valeurs de la table de mortalité obtenues par Graunt à Londres comme des valeurs théoriques pour estimer et comparer leur durée de vie future (moyenne et probable).

n désigne l'âge (en années révolues) et Qn la proportion de survivants à l'age n .

n	Qn	n	Qn	n	Qn	n	Qn	n	Qn	n	Qn	n	Qn	n	Qn	n	Qn	n	Qn
0	1	10	0,653	20	0,592	30	0,523	40	0,436	50	0,335	60	0,232	70	0,131	80	0,034	90	0,007
1	0,855	11	0,646	21	0,586	31	0,515	41	0,427	51	0,324	61	0,22	71	0,12	81	0,028	91	0,006
2	0,798	12	0,64	22	0,579	32	0,507	42	0,417	52	0,313	62	0,212	72	0,109	82	0,023	92	0,005
3	0,76	13	0,634	23	0,573	33	0,499	43	0,407	53	0,302	63	0,202	73	0,098	83	0,02	93	0,004
4	0,732	14	0,628	24	0,567	34	0,49	44	0,397	54	0,292	64	0,192	74	0,088	84	0,018	94	0,003
5	0,71	15	0,622	25	0,56	35	0,481	45	0,387	55	0,282	65	0,182	75	0,078	85	0,016	95	0,002
6	0,692	16	0,616	26	0,553	36	0,472	46	0,377	56	0,272	66	0,172	76	0,068	86	0,014	96	0,001
7	0,68	17	0,61	27	0,546	37	0,463	47	0,367	57	0,262	67	0,162	77	0,058	87	0,012	97	0
8	0,67	18	0,604	28	0,539	38	0,454	48	0,357	58	0,252	68	0,152	78	0,049	88	0,01	98	0
9	0,661	19	0,598	29	0,531	39	0,445	49	0,346	59	0,242	69	0,142	79	0,041	89	0,009	99	0



On appelle V la durée de vie d'un habitant de Breslau choisi au hasard au début du XVIIIème siècle. L'équiprobabilité nous permet de prendre les proportions comme valeurs des probabilités.
Sa loi de probabilité est calculée à l'aide de la formule : $p (V = n) = Q_n - Q_{n-1}$ et est donnée par le tableau suivant :

n	p(V=n)	n	p(V=n)	n	p(V=n)	n	p(V=n)	n	p(V=n)	n	p(V=n)	n	p(V=n)	n	p(V=n)	n	p(V=n)	n	p(V=n)
0	0,145	10	0,007	20	0,01	30	0,008	40	0,009	50	0,011	60	0,012	70	0,011	80	0,006	90	0,001
1	0,057	11	0,006	21	0,01	31	0,008	41	0,01	51	0,011	61	0,008	71	0,011	81	0,005	91	0,001
2	0,038	12	0,006	22	0,01	32	0,008	42	0,01	52	0,011	62	0,01	72	0,011	82	0,003	92	0,001
3	0,028	13	0,006	23	0,01	33	0,009	43	0,01	53	0,01	63	0,01	73	0,01	83	0,002	93	0,001
4	0,022	14	0,006	24	0,01	34	0,009	44	0,01	54	0,01	64	0,01	74	0,01	84	0,002	94	0,001
5	0,018	15	0,006	25	0,01	35	0,009	45	0,01	55	0,01	65	0,01	75	0,01	85	0,002	95	0,001
6	0,012	16	0,006	26	0,01	36	0,009	46	0,01	56	0,01	66	0,01	76	0,01	86	0,002	96	0,001
7	0,01	17	0,006	27	0,01	37	0,009	47	0,01	57	0,01	67	0,01	77	0,009	87	0,002	97	0
8	0,009	18	0,006	28	0,01	38	0,009	48	0,011	58	0,01	68	0,01	78	0,008	88	0,001	98	0
9	0,008	19	0,006	29	0,01	39	0,009	49	0,011	59	0,01	69	0,011	79	0,007	89	0,002	99	0

1) Calculer l'espérance de vie d'un habitant de Breslau à sa naissance, au début du XVIIIème siècle .

l'espérance de vie à sa naissance est donc obtenue par la formule mathématique : $\Sigma\, p_i\, x_i$, avec les valeurs du tableau de la loi de probabilité , c'est à dire $\Sigma\, p(V=n) \times n$, on obtient avec le tableur : environ 33 ans .

2) Calculer la durée de vie probable d'un habitant de Breslau à sa naissance, au début du XVIIIème siècle.

On trouve aussi Qn = 0.5 pour n = 32 (entre 32 et 33)

commentaires : les deux points de vue sont radicalement différents, l'un est une vision de banquier, l'autre est celle d'un pari : une chance sur deux que … à l'époque ce fut un gros sujet de controverse , chances , hasard, probabilités … à éclaircir et mettre en forme dans une théorie mathématique .

3) On choisit une personne de 42 ans dans la ville de Breslau au XVIIIième siècle, déterminer à l'aide la table, sa durée de vie moyenne à 42 ans puis sa durée de vie probable à 42 ans.
Durée de vie moyenne avec le tableur : 62 ans
Durée de vie probable :0.417/2=0.208 ce qui correspond aussi à environ 63 ans

Analogie entre moyenne et médiane

Attention *: Le problème fondamental pour l'application à des situations concrètes est dans la répétition d'expériences aléatoires de façons identiques et indépendantes, ne serait-ce qu'à cause du temps qui passe … Dans le cours de math de 1S, on applique les propriétés d'un schéma de Bernoulli à une situation théorique « parfaite ». Les utiliser dans la pratique est un choix de l'utilisateur.*