Mesure et incertitudes (Eduscol juin 2012): un point de rencontre entre mathématiques et sciences expérimentales

« Il ne suffit pas d'un nombre pour exprimer la mesure ; il en faut l'estimation la plus probable de la grandeur et l'amplitude de l'intervalle à l'intérieur duquel elle a de grandes chances de se trouver et qu'on appelle intervalle de confiance »

(Jean Perdijon, ingénieur, 1998)

Ce document a pour vocation de présenter la vision probabiliste de l'erreur, développée depuis environ trois décennies par le Bureau international des poids et mesures (BIPM) et qui a permis d'installer un consensus international dans l'expression de l'incertitude de mesure.

Il se veut être une ressource pour les enseignants de sciences physiques et de mathématiques des lycées.

Pour les enseignants de sciences physiques elle veut donner à comprendre les raisons et les mécanismes mis en œuvre derrière les formules qui sont appliquées dans les estimations de mesures de grandeur, par exemple dans le programme de première STL, www.education.gouv.fr/cid55406/mene1104103a.html en complétant ainsi les documents déjà parus : *Nombres, mesures et incertitudes* (Inspection générale Sciences Physiques et Chimiques) http://eduscol.education.fr/pid23213-cid46456/ressources-pour-le-college-et-le-lycee.html

Pour les enseignants de mathématiques, elle donnera des exemples d'utilisation des notions probabilistes enseignées au lycée, en particulier en liant la notion d'erreur à celle de variable aléatoire, celle d'incertitude-type avec celle d'écart-type.

La mesure dans les programmes de physique-chimie dans le filière S (MEN, 2010)

Seconde : Les élèves doivent pouvoir « *réaliser et analyser les mesures, en estimer la précision et écrire les résultats de façon adaptée* ».

Première S : Lors des activités expérimentales les questions de mesure et d'incertitude sont cruciales : « *Elles établissent un rapport critique avec le monde réel [...] où les mesures - toujours entachées d'erreurs aléatoires ou systématiques - ne permettent de déterminer des valeurs de grandeurs qu'avec une incertitude qu'il faut pouvoir évaluer au mieux* ».

Terminale :

- *Identifier les **différentes sources d'erreur** (de limites à la précision) lors d'une mesure : **variabilités du phénomène et de l'acte de mesure** (facteurs liés à l'opérateur, aux instruments, ...).*
- *Évaluer et comparer les incertitudes associées à chaque source d'erreur.*
- *Expression et acceptabilité du résultat*
- *Exprimer le résultat d'une opération de mesure par une valeur issue éventuellement d'une moyenne, et une **incertitude de mesure associée à un niveau de confiance**.*

Statistique et probabilités dans les programmes de mathématiques

Statistique descriptive

Collège	Seconde	Premières	Terminales
• effectif • fréquence • classe • médiane • quartiles	• moyenne • effectifs et fréquences cumulés	• variance • écart-type	
• diagramme en bâtons • graphiques cartésiens	• histogrammes	• *diagrammes en boîte*	
			• *statistique à deux variables* • *ajustement*

Lois de probabilité

Collège	Seconde	Premières	Terminales
• notion de probabilité	• probabilité sur un ensemble fini • événement • $P(A \cup B)+P(A \cap B)=P(A)+P(B)$ • tableau croisé • arbre des possibles	• variables aléatoires discrètes • espérance • *variance* • *écart-type*	• probabilité conditionnelle • *indépendance* • variables aléatoires à densité sur un intervalle
		• lois de Bernoulli • lois binomiales • *lois géométriques tronquées*	• lois uniformes • *lois exponentielles* • lois normales
		• *approche de la loi des grands nombres*	

Statistiques inférentielles

Seconde	Premières	Terminales
échantillonnage		
• intervalle de fluctuation	• intervalle de fluctuation binomiale	• intervalle de fluctuation asymptotique
	prise de décision	**prise de décision**
	• prise de décision à partir d'un intervalle de fluctuation binomiale	• *prise de décision à partir d'un intervalle de fluctuation asymptotique* • *égalité de deux proportions*
		estimation
		• intervalle de confiance

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ d'espérance μ et d'écart-type σ.	• Utiliser une calculatrice ou un tableur pour calculer une probabilité dans le cadre d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.	Une variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ si $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On fait percevoir l'information apportée par la valeur de l'écart-type. ⇆ [SI et SPC] Mesures physiques sur un système réel en essai.
	• Connaître une valeur approchée de la probabilité des événements suivants : $\{X \in [\mu-\sigma, \mu+\sigma]\}$, $\{X \in [\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]\}$ et $\{X \in [\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]\}$, lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.	La connaissance d'une expression algébrique de la fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ n'est pas un attendu du programme. On illustre ces nouvelles notions par des exemples issus des autres disciplines.

On savait depuis longtemps, notamment en astronomie, science qui possédait les instruments les plus précis, que :
• plusieurs mesures d'une même grandeur donnaient souvent des valeurs différentes,
• la répartition des résultats avait une « forme en cloche » : « *il n'y a aucun doute que les petites erreurs ont lieu plus souvent que les grandes* ».

Il n'y a pas d'aléatoire dans des données statistiques en nombre fini. Cependant,

- on peut expliquer la variabilité des résultats du mesurage comme s'ils étaient des réalisations d'une variable aléatoire (**fluctuation des résultats lors d'une simulation d'une loi de probabilité**).
- on peut chercher un modèle probabiliste permettant de passer de quelques observations à une caractéristique de l'ensemble de toutes les observations possibles (**statistiques inférentielles et intervalles de confiance**).

A partir d'un TP, comment sensibiliser les élèves à la notion d'incertitude.

Le professeur montre un récipient contenant un liquide et fixe comme objectif aux élèves de déterminer s'il s'agit d'eau distillée ou d'eau de mer.

Matériel :

- éprouvette de 25 ml
- pipette Pasteur
- balance à 0,2g près
-

Protocole de l'expérience :
On considère que la température est constante tout au long de la manipulation.

→ Etape 1 : Rincer l'éprouvette avec de l'eau, puis la rincer avec de l'acétone et la sécher.
→ Etape 2 : Ajuster le zéro de la balance. Rapidement après, peser l'éprouvette vide (masse m_1) et noter le résultat.
→ Etape 3 : Remplir l'éprouvette avec 25 mL du liquide à analyser en évitant les éclaboussures sur les parois de l'éprouvette (sinon, les sécher avec du papier absorbant) ; utiliser la pipette Pasteur pour terminer le remplissage au goutte-à-goutte (attention à la parallaxe et au ménisque).
→ Etape 4 : Ajuster le zéro de la balance. Rapidement après, peser l'éprouvette remplie (masse m_2) et noter le résultat.

Questions du professeur ?

1. Le récipient contient-il de l'eau distillée ou de l'eau de mer ? (masse volumique de l'eau : 1 g.cm^{-3}, masse volumique de l'eau de mer : 1,025 g.cm^{-3})

2. Pourquoi les résultats sont-ils différents d'un élève à l'autre ?
Les élèves formulent des réponses en termes de différences de manipulation :
Matériels différents : éprouvette, résolution de la balance…
Manipulateurs différents ; perception visuelle, dextérité….

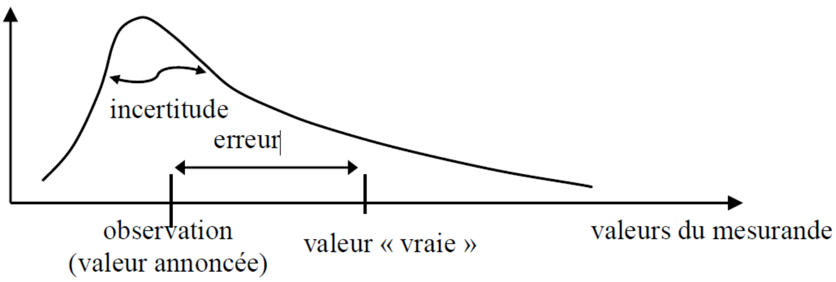
3. Que se serait-il passé si les mesures avaient toutes été effectuées avec le même matériel par le même manipulateur ?
Les élèves répondent que les résultats seraient identiques.
Le professeur fait alors reprendre 4 fois à chaque élève le protocole précédent.
Les élèves constatent que leurs 5 résultats d'expérience ne sont pas identiques.

4. Quelle est la « vraie » réponse ?

Remarque : c'est l'occasion de faire construire des histogrammes.

Définitions en métrologie (norme AFNOR NF X07-001 de décembre 1994)

Mesurage : ensemble d'opérations ayant pour but de déterminer une valeur d'une grandeur.
Mesurande : grandeur particulière soumise à mesurage (longueur, masse, intensité,…).
« Valeur vraie » d'un mesurande : mesure que l'on obtiendrait par un mesurage parfait. On ne la connaît pas et on parle également de « valeur théorique ». On note x_0.
Grandeur d'influence : grandeur qui n'est pas le mesurande mais qui a un effet sur le résultat du mesurage.
Erreur sur une observation: différence entre un résultat x du mesurage et la valeur théorique. $e_i = x - x_0$.
Incertitude : paramètre associé au résultat d'un mesurage qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande (norme NF ENV 13005 d'août 1999), ceci dans le but :
- de confronter plus efficacement l'expérience avec un modèle théorique.
- de réaliser une critique plus constructive du protocole expérimental.



La démarche visée est de fournir, autour du résultat d'un mesurage, un intervalle dont on puisse s'attendre à ce qu'il comprenne une fraction élevée des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande.

Types de mesure
La mesure d'une grandeur peut être : directe comme une pesée ou une distance, indirecte comme une vitesse.

La notion d'erreur
Si l'on répète le mesurage d'une grandeur, on obtient une série d'observations $x_1, x_2, ..., x_n$, considérées comme les valeurs prises par une variable aléatoire X, et une série de valeurs $e_1, e_2, ..., e_n$ qui sont les erreurs sur chacune des observations, considérées comme les valeurs prises par une variable aléatoire *E*.
On peut ainsi modéliser le mesurage de cette grandeur par : $X = x_0 + E$.

L'objet du calcul d'incertitude sera de déterminer la loi de probabilité suivie par *X* ou par *E*, et à déterminer les paramètres (espérance et écart-type) de cette loi de probabilité.
On rappelle que $E(aY+b) = aE(Y)+b$ et $V(aY+b) = a^2V(Y)$
d'où $E(X) = x_0 + E(E)$ et $\boxed{V(X) = V(E)}$
Si on fait l'hypothèse objective que les résultats se répartissent de chaque côté de la « valeur vraie »,
alors cette hypothèse se traduit par : $E(E) = 0$ donc $\boxed{E(X) = x_0}$.

Traitement de l'incertitude

Il se fait en trois étapes :
1. Calcul de l'incertitude –type:
- Dans le cas où l'opérateur peut faire une série de mesures, le traitement de l'incertitude est statistique : on parle d'incertitude de type A.
  Cette analyse statistique se fait lorsqu'on a peu d'indications sur les sources d'erreurs.
- S'il réalise une mesure unique, l'opérateur doit chercher les sources d'erreurs puis choisir un modèle probabiliste adapté : on parle d'incertitude de type B.

2. Calcul de l'incertitude composée :
Comme il faut souvent combiner les méthodes de type A et de type B, on doit composer les incertitudes.
3. Calcul de l'incertitude élargie et résultat final.

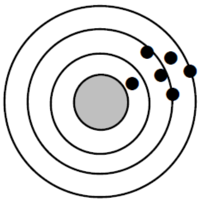
Incertitude de type B

Pour choisir à priori un modèle probabiliste, l'opérateur prend en compte:

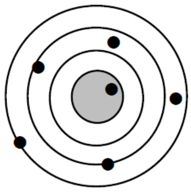
- la connaissance du comportement des instruments et des propriétés des matériaux utilisés.
- les spécifications du fabricant.
- les données fournies par des certificats d'étalonnage.

Il est nécessaire de faire un bilan des erreurs :

→ Les erreurs systématiques telles que l'erreur de parallaxe, le réglage du zéro, le vieillissement des composants…



→ Les erreurs aléatoires telles que les erreurs de lecture, les erreurs dues aux conditions extérieures (température et dilatation, pression atmosphérique, humidité…).



Si on sait raisonnablement que les valeurs de la grandeur *X* sont comprises entre deux valeurs $x_{\min}$ et $x_{\max}$, la loi de probabilité de *X* entre ces deux valeurs va décider de l'incertitude-type retenue.

Dans ce qui suit, on pose $a = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$

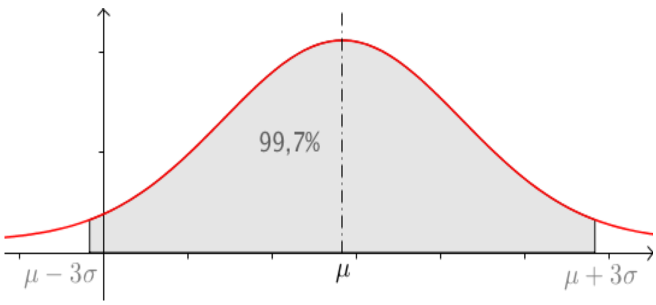
Si *x* désigne la valeur obtenue lors de la mesure unique, on note $u(x)$ l'incertitude-type sur cette mesure.

1. Distribution gaussienne (loi normale):

Cette loi est un modèle essentiel dans l'étude de la variabilité et a un usage très important en statistique.
Elle est apparue au début du XIX$^{\text{ème}}$ et s'est introduite par deux voies :

Loi des erreurs (moindres carrés) en astronomie et géodésie avec Legendre puis Gauss.

Théorèmes limites avec Bernoulli puis Laplace ; Approximation d'une loi binomiale par une loi normale avec Moivre puis Laplace.

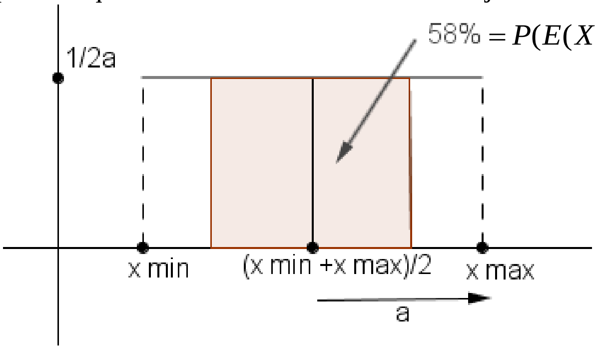


$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\boxed{u(x) = \frac{a}{3}}$$

6σ représente 99,7% des valeurs prises par *X*, donc $a = 3\sigma$.

2. Distribution rectangulaire (loi uniforme):**
Par exemple, une mise au point sur un banc d'optique donne un ensemble de valeurs pour lesquelles les mesures semblent être justes.



$$\boxed{u(x) = \frac{a}{\sqrt{3}}}$$

La fonction f définie sur $[x_{\min} ; x_{\max}]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2a}$ est la densité de cette loi uniforme.

En effet, f est continue, positive sur cet intervalle et $\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x)dx =$ aire totale « sous la courbe de f » $= 2a \times \dfrac{1}{2a} = 1$.

$$\mu = E(X) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} xf(x)dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{1}{2a}xdx = \frac{1}{2a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_{\min}}^{x_{\max}} = \frac{1}{4a}\left(x_{\max}^2 - x_{\max}^2\right) = \frac{1}{4a}\left(x_{\max} - x_{\min}\right)\left(x_{\max} + x_{\min}\right) = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}$$

Remarque :la valeur moyenne est égale à la valeur médiane de X.

$$V(X) = \int_{\mu-a}^{\mu+a} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{\mu-a}^{\mu-a} \frac{1}{2a}(x-\mu)^2 dx = \frac{1}{2a}\left[\frac{(x-\mu)^3}{3}\right]_{\mu-a}^{\mu+a} = \frac{1}{6a}\left(a^3 + a^3\right) = \frac{a^2}{3}$$

Cette loi est utilisée lorsqu'on ne connaît qu'une majoration de l'erreur, ce qui est souvent le cas pour les appareils de mesure.
En pratique, on commence par définir la précision Δ de l'instrument de mesure utilisé pour la lecture:

- **pour un appareil munie d'une échelle graduée**, on estime que Δ correspond à une demi-graduation.

  L'incertitude type est $u(x) = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{2a}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1 \text{ graduation}}{\sqrt{12}}$

Exemple d'un double-décimètre gradué : $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{12}} \approx 0{,}289\text{mm}$

- **pour un appareil numérique à affichage digital,** on se reporte à la notice de ce dernier pour obtenir Δ.

  L'incertitude type est $u(x) = \dfrac{\Delta}{\sqrt{3}}$

Exemple d'un voltmètre numérique :
on lit sur la notice $\Delta = 0{,}3\% \times U + 2 \times UR$ *et on mesure une tension qui s'affiche avec la valeur* $280{,}0\ V$.
UR est l'unité de représentation, c'est-à-dire la valeur du dernier digit affiché donc $UR = 0{,}1\ V$.

Par conséquent, $u(x) = \dfrac{0{,}003 \times 280 + 2 \times 0{,}1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}600\ \text{V}$

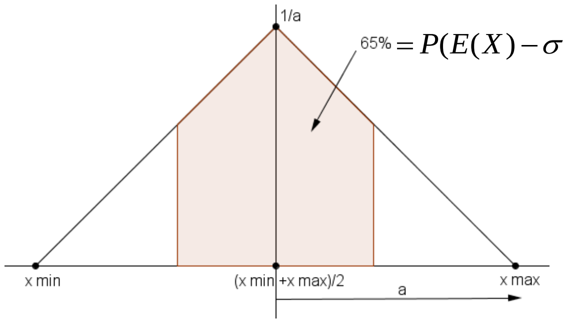
- **si le constructeur fournit une indication du type** $\Delta_c = \pm \ldots$ **sans autre information, on considère alors que** Δ_c **est l'erreur maximale et on prend** $u(x) = \dfrac{\Delta_c}{\sqrt{3}}$**.**

Exemple d'une burette graduée de 25 mL pour laquelle la tolérance est de $\pm 0{,}05mL$.

Dans ce cas $u(x) = \dfrac{0{,}05}{\sqrt{3}} \simeq 0{,}0289mL$.

3. distribution triangulaire :

Dans de nombreux cas, il est plus réaliste de s'attendre à ce que le nombre de valeurs autour de $x_{\min}$ et $x_{\max}$ soit sensiblement inférieur à celui des valeurs autour de la valeur centrale.
Il est alors raisonnable de remplacer la loi rectangulaire par une loi trapézoïdale symétrique de bases $2a$ et $2a\beta$ avec $0 \le \beta \le 1$.
Lorsque $\beta \to 1$, cette loi tend vers la loi rectangulaire alors que pour $\beta = 0$, elle devient une loi triangulaire.



$= P(E(X) - \sigma \le X \le E(X) + \sigma)$

$$\boxed{u(x) = \frac{a}{\sqrt{6}}}$$

La fonction f définie par morceaux sur $[x_{\min} ; x_{\max}]$ est la densité de cette loi uniforme.

En effet, f est continue, positive sur cet intervalle et $\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x)dx =$ aire totale « sous la courbe de f » $= \frac{1}{2}\left(2a \times \frac{1}{a}\right) = 1$.

$$\mu = E(X) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} xf(x)dx = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}$$

$$V(X) = \int_{\mu-a}^{\mu+a} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{\mu-a}^{\mu} (x-\mu)^2 \times \frac{1}{a^2}(x-\mu+a)dx + \int_{\mu}^{\mu+a} (x-\mu)^2 \times \frac{-1}{a^2}(x-\mu-a)dx$$

Avec le changement de variable $t = x - \mu$, on obtient :

$$V(X) = \frac{1}{a^2}\left(\int_{-a}^{0} t^2(t+a)dt + \int_{0}^{a} t^2(-t+a)dx\right) = \frac{1}{a^2}\left(\left[\frac{t^4}{4} + \frac{at^3}{3}\right]_{-a}^{0} + \left[-\frac{t^4}{4} + \frac{at^3}{3}\right]_{0}^{a}\right) = \frac{1}{a^2}\left(-\frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{3}\right) = \frac{a^2}{6}$$

Exemple :
On veut déterminer l'incertitude-type sur une pipette 20,00 mL de classe A. On sait que l'Erreur Maximale Tolérée est égale à 0,2% du volume total.
On suppose que le volume prélevé est distribué, d'après le fabricant, selon une loi de probabilité a priori triangulaire symétrique.
L'incertitude-type du fabricant est $u(x) = \frac{0{,}04}{\sqrt{6}} = 0{,}016\, mL$.

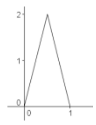
Remarques :

- Pour toute loi triangulaire de paramètres $a(x_{\min})$, $b(x_{\max})$ et $c(x_{\text{mode}})$,

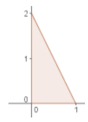
$$E(X) = \frac{1}{3}(a+b+c) \text{ et } V(X) = \frac{1}{18}\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc\right)$$

- Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes distribuées selon une loi uniforme,

  $\frac{X_1 + X_2}{2}$ suit une loi triangulaire de paramètres $a = 0,\ b = 1,\ c = 0{,}5$.



  $|X_1 - X_2|$ suit une loi triangulaire de paramètres $a = 0,\ b = 1,\ c = 0$.



De toutes les lois précédentes, la loi rectangulaire est la loi « du pire » car c'est celle qui a le plus grand écart-type.

On a peu d'indications sur les sources d'erreurs. L'opérateur effectue alors une série de mesures.
Les conditions de répétabilité sont remplies lorsque l'opérateur effectue *n* mesures dans les mêmes conditions : on obtient une série d'observations $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ de moyenne $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ et de variance $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$

Comment donner une bonne estimation de $E(X)$ et $V(X)$ à partir des valeurs $\bar{x}$ et s^2 issues d'un échantillon ?

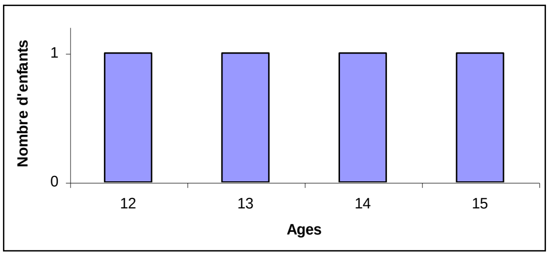
Théorie mathématique de l'échantillonnage :

Supposons que toutes les valeurs d'une variable aléatoire X soient distribuées avec une espérance mathématique $E(X)$ et une variance $V(X)$.

Exemple :
On considère une population de quatre enfants, Anaïs, Benjamin, Clara et David d'âges respectifs 12, 13, 14 et 15 ans.

Soit la variable aléatoire X qui, à tout enfant pris au hasard, associe son âge.

- *Représenter par un diagramme en bâtons, la répartition des enfants par âge.*
- *Calculer* $E(X)$ et $V(X)$, *les paramètres de cette population d'enfants.*



La répartition de l'âge des enfants dans la population est uniforme.

$E(X) = 13{,}5$ et $V(X) = 1{,}25$

On note $\left(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n\right)$ un échantillon aléatoire de taille *n* (donc constitué par tirages successifs de *n* individus dans la population au hasard et avec remise), où X_i est la variable aléatoire associée à la $i^{ème}$ observation.
Les variables X_i sont indépendantes, chacune ayant pour espérance mathématique $E(X)$ et pour variance $V(X)$.

❶ Pour des échantillons de taille *n*, $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est la variable aléatoire appelée **moyenne d'échantillonnage**.

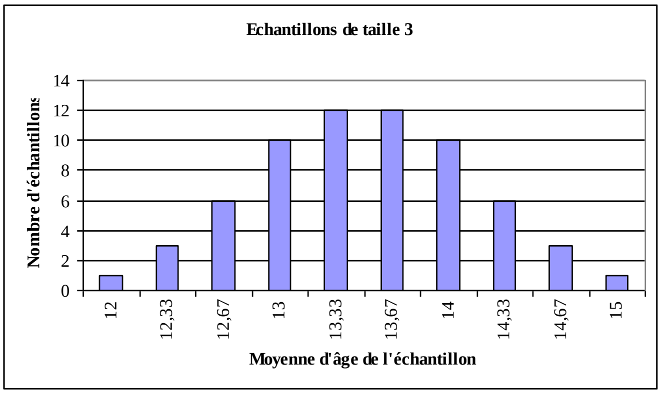
➢ **La moyenne d'échantillonnage** $\overline{X_n}$ **a pour espérance mathématique** $E\left(\overline{X_n}\right) = E(X)$**.**
On dit que cette variable est sans biais.

En effet : $E\left(\overline{X_n}\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\left[E(X_1) + E(X_2) + \ldots. + E(X_n)\right] = \frac{1}{n} \times nE(X)$

La moyenne arithmétique $\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$ **des *n* observations est donc une bonne estimation de l'espérance** $E(X)$ **de la variable *X*.**

Exemple :
Par un tirage avec remise, on peut obtenir $4^3 = 64$ *échantillons différents de taille 3 dans la population étudiée.*
Pour les 64 échantillons de taille 3 dans la population des 4 enfants, on a la distribution suivante :

Moyenne d'âge dans l'échantillon (en années)	*12*	*12,33*	*12,667*	*13*	*13,333*	*13,667*	*14*	*14,333*	*14,667*	*15*
Nombre d'échantillons	*1*	*3*	*6*	*10*	*12*	*12*	*10*	*6*	*3*	*1*



La moyenne des moyennes d'âge des enfants dans les 64 échantillons de taille 3 est $E\left(\overline{X_3}\right)=13{,}5$ *ans ;*
ce résultat est égal à $E(X)$.

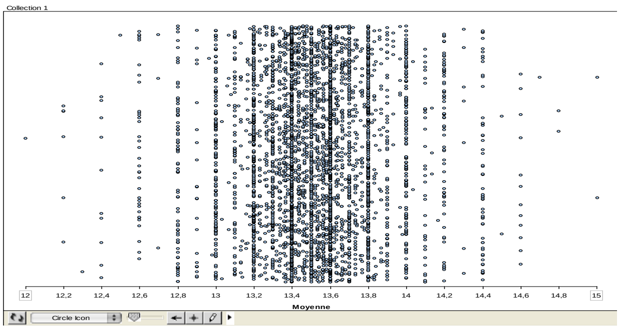
Sur ordinateur, on peut simuler 4000 échantillons issus d'une expérience aléatoire de loi uniforme discrète dont les résultats sont 12, 13, 14 et 15.

- 1 000 échantillons de taille 5,

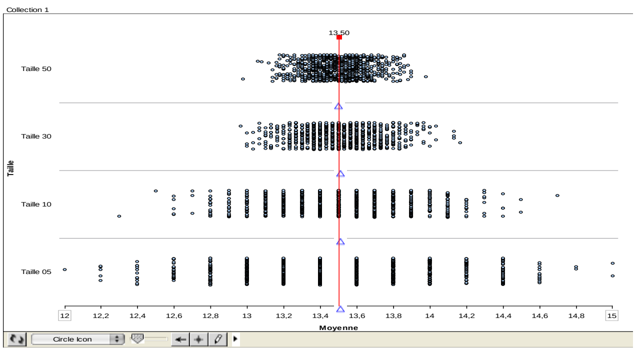
- 1 000 échantillons de taille 10,

- 1 000 échantillons de taille 30,

- 1 000 échantillons de taille 50.



Chaque point représente un des 4 000 échantillons ; son abscisse est la moyenne de l'échantillon et son ordonnée est aléatoire.



Séparation des échantillons selon leurs tailles.
Matérialisation de la moyenne des moyennes des échantillons dans chacun des groupes.

- **La moyenne d'échantillonnage** $\overline{X_n}$ **a pour variance** $V\left(\overline{X_n}\right)=\dfrac{V(X)}{n}$.

En effet : $V\left(\overline{X_n}\right)=V\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{1}{n^2}\left[V(X_1)\ +\ V(X_2)\ +\ ....+\ V(X_n)\right]=\dfrac{1}{n^2}\times nV(X)$

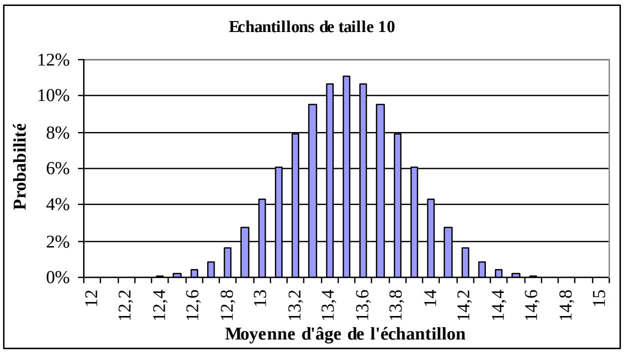
Exemple :
La variance des moyennes d'âge des enfants observées dans tous les échantillons différents de taille 3 est
$V\left(\overline{X_3}\right)=\dfrac{1}{64}\left(1\times(12-13{,}5)^2+3\times(12{,}33-13{,}5)^2+....1\times(15-13{,}5)^2\right)=0{,}417$ *, qui est égale à* $\dfrac{V(X)}{3}$.

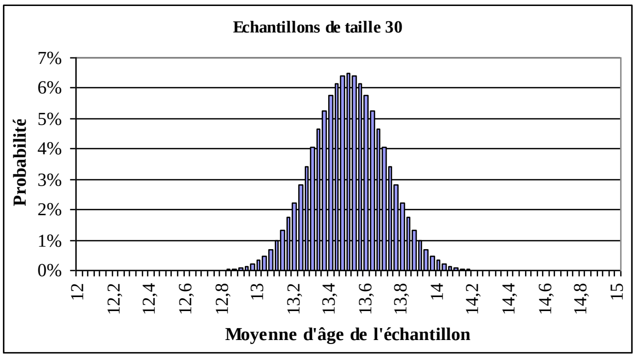
Remarque :

La distribution de l'ensemble des moyennes est bien moins dispersée que l'ensemble des valeurs de X.

Ceci confirme l'idée « a priori » que l'estimation à partir d'une moyenne est meilleure que sur une mesure isolée.
Plus la taille n de l'échantillon est grande, plus la proportion d'échantillons de taille n ayant une moyenne proche de $E(X)$ est importante (loi faible des grands nombres).

Exemple :
Pour une répartition uniforme des âges des enfants (12, 13, 14 et 15 ans) dans la population, on obtient les distributions de probabilités de la moyenne d'échantillonnage pour les échantillons de taille 10, puis 30 :





❷ Pour des échantillons de taille n, la variable aléatoire $V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_n}\right)^2$ est appelée **variance d'échantillonnage**.

➢ **La variance d'échantillonnage V_n a pour espérance mathématique $E(V_n) = \frac{n-1}{n}V(X)$.**

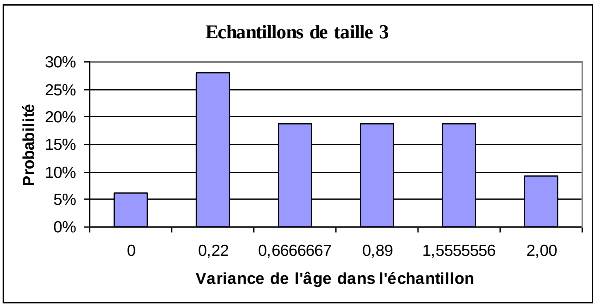
En effet:
$$E(V_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_n}\right)^2\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - E(X) + E(X) - \overline{X_n}\right)^2\right)$$
$$= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i - E(X)\right)^2 + 2\left(X_i - E(X)\right)\left(E(X) - \overline{X_n}\right) + \left(E(X) - \overline{X_n}\right)^2\right]\right)$$
$$= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - E(X)\right)^2 + 2\left(E(X) - \overline{X_n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - E(X)\right) + n\left(E(X) - \overline{X_n}\right)^2\right)$$
$$= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - E(X)\right)^2 + 2\left(E(X) - \overline{X_n}\right)\left(n\overline{X_n} - nE(X)\right) + n\left(E(X) - \overline{X_n}\right)^2\right)$$
$$= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - E(X)\right)^2 - n\left(E(X) - \overline{X_n}\right)^2\right)$$
$$= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - E(X)\right)^2\right) - \frac{1}{n}\times nE\left(\left(E(X) - \overline{X_n}\right)^2\right)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(\left(X_i - E(X)\right)^2\right) - E\left(\left(E(X) - \overline{X_n}\right)^2\right)$$
$$= \frac{1}{n}\times nV(X) - V\left(\overline{X_n}\right) = V(X) - \frac{V(X)}{n} = \frac{n-1}{n}V(X)$$

- Si n est grand, $\frac{n-1}{n} \approx 1$: la variance d'un échantillon de taille n est alors une bonne estimation de la variance $V(X)$ de la variable X.
- Si n est petit, la variance d'échantillonnage est une variable aléatoire **biaisée**.

Exemple :

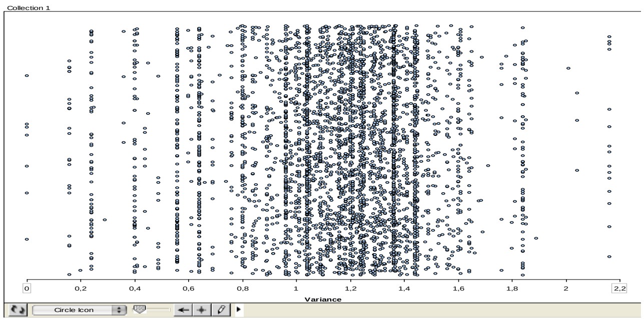
Pour les 64 échantillons de taille 3, constitués avec remise dans la population des 4 enfants, on a la distribution de la variance d'échantillonnage ci-contre.
La variance des âges dans les échantillons a pour moyenne environ 0,833 ; la variance des âges dans la population d'enfants est 1,25 : la variance d'échantillonnage est un estimateur biaisé de la variance de l'âge dans la population.

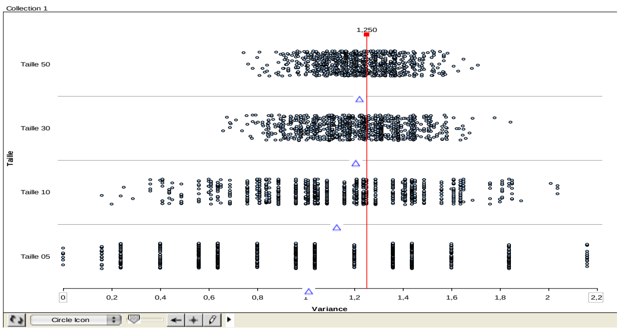
On remarque que $0{,}833 = \frac{2}{3} \times 1{,}25$.



Par simulation des 4000 échantillons, on obtient :

Chaque point représente un des 4000 échantillons, son abscisse est la variance de l'échantillon et son ordonnée est aléatoire.



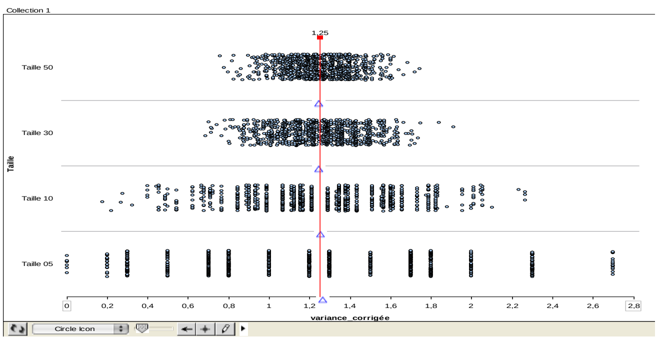


Séparation des échantillons selon leurs tailles.
Matérialisation de la moyenne des variances des échantillons dans chacun des groupes.

➢ **La variance d'échantillonnage corrigée** $\hat{V}_n = \frac{n}{n-1} V_n$ **a pour espérance mathématique** $E(\hat{V}_n) = V(X)$**.**

En effet : $E\left(\frac{n}{n-1} V_n\right) = \frac{n}{n-1} E(V_n) = \frac{n}{n-1} \times \frac{n-1}{n} V(X) = V(X)$

Par simulation des 4000 échantillons, on obtient :



Chaque point représente un échantillon, son abscisse est la variance corrigée de l'échantillon. Séparation des échantillons selon leurs tailles.

Matérialisation de la moyenne des variances corrigées des échantillons dans chacun des groupes.

La variance expérimentale corrigée des *n* observations $\boxed{\sigma_{n-1}^2 = \frac{n}{n-1}s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$ **est donc une bonne estimation de la variance** $V(X)$ **de la variable *X*.**

L'écart-type corrigé σ_{n-1} est une estimation de la dispersion des valeurs prises par X autour de la moyenne $E(X)$.
Il est appelé **écart-type expérimental d'une mesure de *X*** ou **écart-type de répétabilité**.

En pratique, on détermine σ_{n-1} avec la calculatrice (S_X sur TI).

Exemple :
On effectue 10 mesures du diamètre d'un cylindre à l'aide d'un pied à coulisse et on obtient, en mm :

52,36	*52,35*	*52,34*	*52,35*	*52,36*	*52,34*	*52,35*	*52,35*	*52,36*	*52,34*

L'écart-type de cette série de mesures est s =0,0077

Pour l'incertitude de type A sur **une mesure ultérieure** *du cylindre, on prendra* $u(x) = \sigma_{n-1} = 0{,}0082$

Attention : L'incertitude de type A sur **la moyenne de 3 mesures ultérieures** du cylindre sera $u(x) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{3}}$

En effet, nous avons vu précédemment que $V\left(\overline{X_n}\right) = \frac{V(X)}{n}$, soit $\sigma\left(\overline{X_n}\right) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$.

Remarque :
Sachant qu'un pied à coulisse a une précision de 0,02mm, l'incertitude de type B sur une mesure du diamètre du cylindre est $u(x) = \frac{0{,}02}{\sqrt{12}} \approx 0{,}0058$

Prise en compte de plusieurs incertitudes

S'il y a *k* sources d'incertitudes **indépendantes**, l'incertitude-type composée est :

$$u(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} u_i^2(x)}$$

En effet, on démontre en mathématiques que si $X_1, X_2, ..., X_k$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors
$V(X_1 + X_2 + ... + X_k) = V(X_1) + V(X_2) + ...\ V(X_k)$

Exemple :
On mesure une longueur L avec un double-décimètre gradué en mm.
L'incertitude-type liée à la graduation est $u_g(l) = \frac{0{,}5}{\sqrt{3}} \approx 0{,}29 \text{ mm}$.*On la considère 2 fois (zéro et lecture).*

L'incertitude-type composée sur la longueur est $u(l) = \sqrt{\frac{0{,}5^2}{3} + \frac{0.5^2}{3}} = \sqrt{2} \times 0{,}29 \approx 0{,}41 \text{ mm}$

Propagation des incertitudes

Lorsque plusieurs grandeurs interviennent dans le mesurage, le résultat doit en tenir compte.
Si $X = f\left(Y_1, Y_2, ..., Y_n\right)$ et si $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sont des variables aléatoires **indépendantes**, on a :

$$\boxed{u(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)u\left(y_i\right)\right)^2}}$$ (loi de propagation de l'incertitude)

Exemples :

- *incertitude sur une vitesse lors de la mesure d'une distance et d'un temps.*

On sait que $v = \frac{d}{t}$. On déduit : $\frac{u(v)}{v} = \sqrt{\left(\frac{u(d)}{d}\right)^2 + \left(\frac{u(t)}{t}\right)^2}$

- *incertitude sur la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance lors de la mesure de cette résistance et de l'intensité.*

On sait que $P = RI^2$. On déduit : $\frac{u(P)}{P} = \sqrt{\left(\frac{u(R)}{R}\right)^2 + \left(2\frac{u(I)}{I}\right)^2}$

Incertitude-type élargie

Dans l'idéal, on aimerait déterminer un réel *k* tel que, si la variable mesurande *X* est estimée par une valeur *x* et une incertitude-type *u*(*x*), alors :

$$P\left(x - k\ u(x) \le X \le x + k\ u(x)\right) = p$$ où *p* est fixé.

$U(x) = k\ u(x)$ est appelée **incertitude élargie sur *X*** et *k* le **coefficient d'élargissement**.

La détermination de *k* correspond en statistique inférentielle à la détermination d'un **intervalle de confiance du mesurande à un niveau de confiance *p*.**
Pour cela, on doit connaître la loi de probabilité suivie par la variable *X*, ce qui n'est pas toujours le cas en pratique si le mesurande dépend de plusieurs grandeurs.

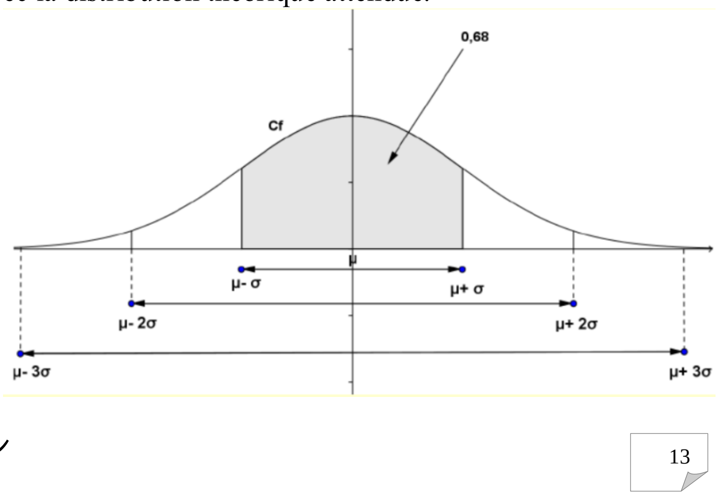
- D'après le théorème limite central, dans des conditions de mesurage où les incertitudes prennent des valeurs du même ordre, alors la variable aléatoire qui modélise l'erreur suit approximativement une loi normale si le nombre de mesures est assez important et $u(x)$ peut être considéré comme une estimation raisonnable de l'écart-type de cette loi normale.

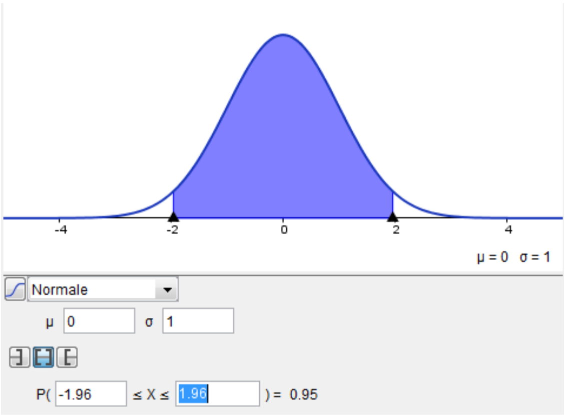
Remarque : on peut vérifier la « normalité » de la loi suivie par X avec un test de Henry, du Khi 2 ou de Kolmogorov. Le test compare la distribution d'un échantillon de données avec la distribution théorique attendue.

Si *X* suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ ,
$P\,(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) \approx 0{,}68$

$P\,(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$

$P\,(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$.



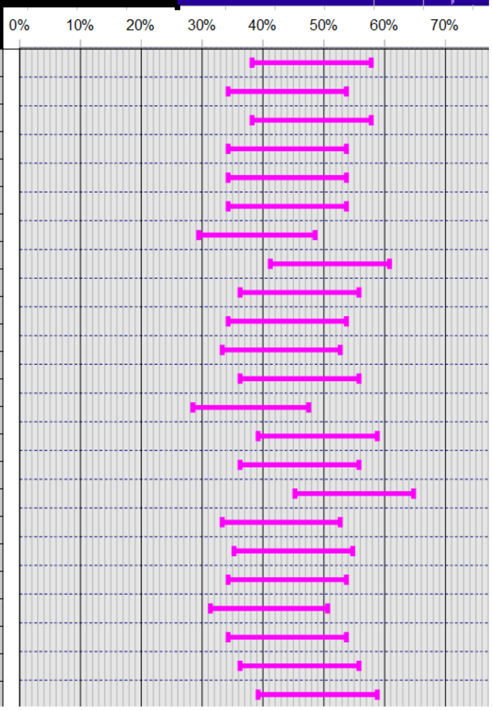


Remarque : $P(\mu - 1{,}96\,\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\,\sigma) = 0{,}95$

Par conséquent, si $k = 2$, on dit que $[x - 2u(x); x + 2u(x)]$ est **un** intervalle de confiance de la grandeur mesurée au niveau de confiance 95%.
Ceci signifie que la procédure choisie a plus de 95% de chance d'obtenir un intervalle contenant effectivement la « valeur vraie » du mesurande.

niveau de confiance = 95 % — fréquence dans la population p = 45 %

échantillon	fréquence	fourchette		95%
1	48%	[38,21%	57,79%]	VRAI
2	44%	[34,27%	53,73%]	VRAI
3	48%	[38,21%	57,79%]	VRAI
4	44%	[34,27%	53,73%]	VRAI
5	44%	[34,27%	53,73%]	VRAI
6	44%	[34,27%	53,73%]	VRAI
7	39%	[29,44%	48,56%]	VRAI
8	51%	[41,20%	60,80%]	VRAI
9	46%	[36,23%	55,77%]	VRAI
10	44%	[34,27%	53,73%]	VRAI
11	43%	[33,30%	52,70%]	VRAI
12	46%	[36,23%	55,77%]	VRAI
13	38%	[28,49%	47,51%]	VRAI
14	49%	[39,20%	58,80%]	VRAI
15	46%	[36,23%	55,77%]	VRAI
16	55%	[45,25%	64,75%]	FAUX
17	43%	[33,30%	52,70%]	VRAI
18	45%	[35,25%	54,75%]	VRAI
19	44%	[34,27%	53,73%]	VRAI
20	41%	[31,36%	50,64%]	VRAI
21	44%	[34,27%	53,73%]	VRAI
22	46%	[36,23%	55,77%]	VRAI
23	49%	[39,20%	58,80%]	VRAI
24	31%	[21,94%	40,06%]	FAUX



Construction de 100 intervalles de confiance au niveau 95%, à partir des fréquences d'une caractéristique dans 100 échantillons aléatoires de même taille, issus d'une population.

- Le nombre de mesures mises en œuvre étant généralement faible, le facteur d'élargissement *k* est assimilable au coefficient de Student *t* disponible dans la loi de Student : il varie selon le nombre de degrés de liberté ν, lié au nombre de mesures *n*, et le niveau de confiance choisi.

$$P\left(x - t\frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} \le X \le x + t\frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}\right) = \text{niveau de confiance}$$

ou $P(x - t \times s \le X \le x + t \times s) =$ niveau de confiance

Attention : le nombre ν de degrés de liberté est égal à $n-1$.
En effet, il y a seulement $(n-1)$ éléments indépendants dans l'ensemble $\{(x_i - \overline{x}),\ 1 \le i \le n\}$ car x_n peut s'écrire en fonction de $\overline{x}$ et des x_i, $1 \le i \le n-1$.

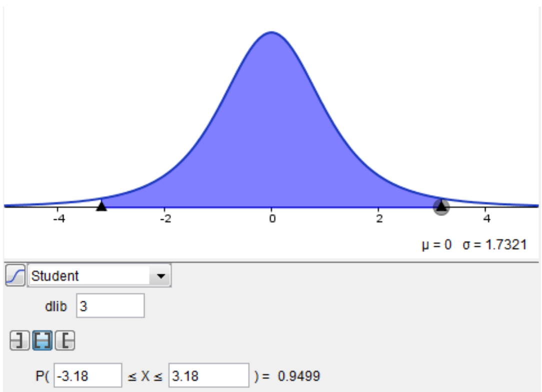


Table G.2 - Valeur de $t_p(\nu)$ de la loi de t pour ν degrés de liberté, qui définit un intervalle de $-t_p(\nu)$ à $+t_p(\nu)$ comprenant la fraction p de la loi

Nombre de degrés de liberté ν	Fraction p en pourcentage					
	68,27[a]	90	95	95,45[a]	99	99,73[a]
	Valeur de $t_p(\nu)$					
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

[a]Pour une grandeur z décrite par une loi normale d'espérance mathématique μ_z et d'écart-type σ, l'intervalle $\mu_z \pm k\sigma$ comprend respectivement p = 68,27; 95,45 et 99,73 pour-cent de la loi pour k = 1, 2 et 3.

Remarque : si $n \to +\infty$, la loi de Student tend vers la loi normale.

Présentation du résultat

Le résultat du mesurage comporte quatre éléments et s'écrira :

$$\boxed{X = \left(x \pm U(x)\right) \text{ unité } \left(k = ...\right)}$$

Pour les calculs intermédiaires, on garde les chiffres en mémoire et on effectue l'arrondissage sur le résultat final.
Par convention, l'incertitude $U(x)$ sera arrondie par excès avec un ou deux chiffres significatifs.
Le nombre de chiffres après la virgule de x s'en déduit logiquement.

Exemples :

- *Si* $x = 12,3247$ et $u(x) = 0,232$ avec $k = 2$,
  $U(x) = 0,463$: on arrondit avec deux chiffres significatifs donc $X = 12,32 \pm 0,47$ (k =2)

- *Si* $x = 123,385$ et $u(x) = 2,892$ avec $k = 2$,
  $U(x) = 5,784$: on arrondit avec deux chiffres significatifs donc $X = 123,4 \pm 5,8$ (k =2)

La **précision** sur le résultat du mesurage est caractérisée par l'incertitude relative de calcul $\dfrac{U(x)}{|x|} = ...\%$.

Plus le résultat est petit, plus le mesurage est de bonne qualité.

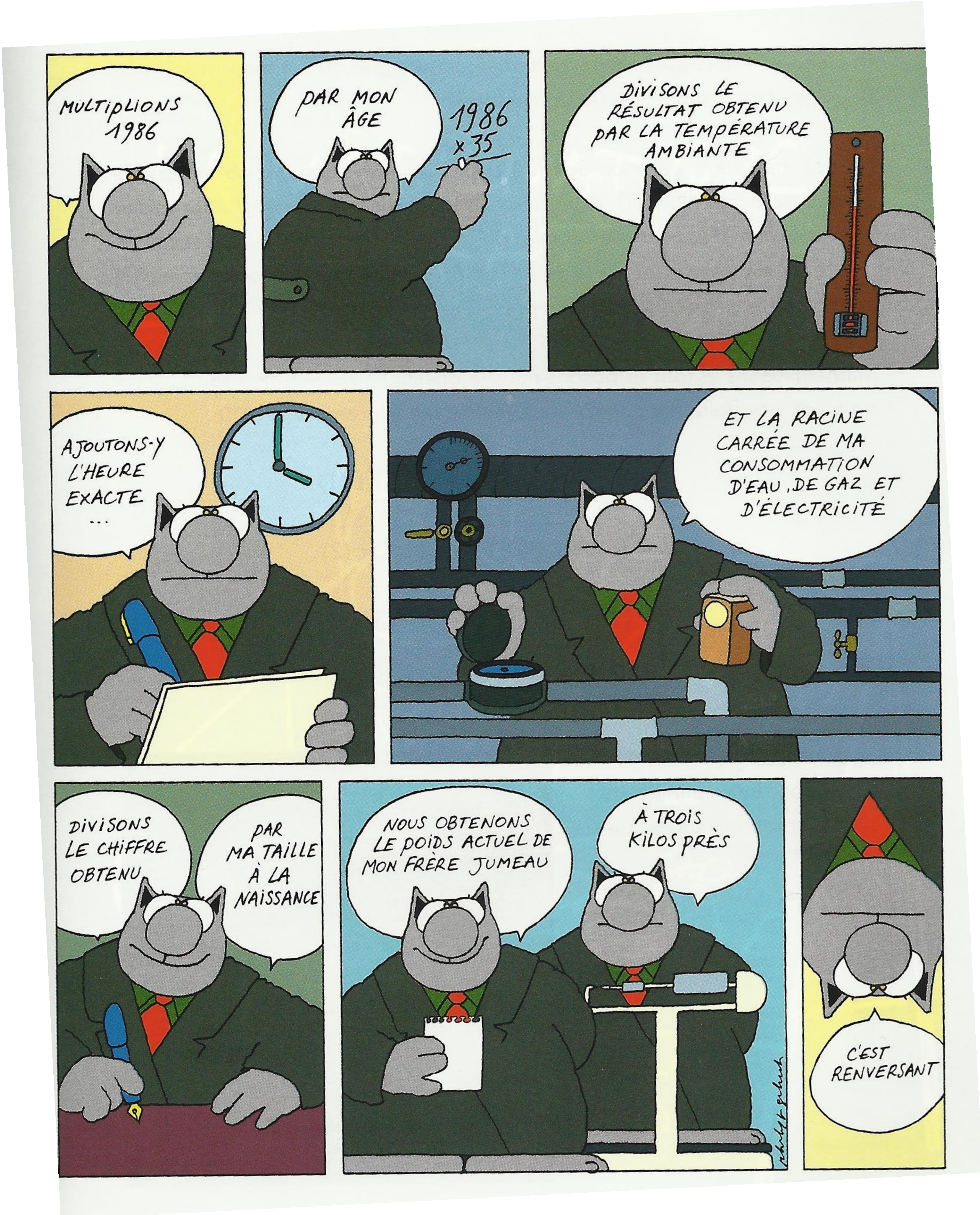
X est une variable aléatoire

discrète	**continue**
Loi de probabilité : $p_i = \mathrm{P}(X = x_i)$ avec $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$	**Densité de probabilité :** fonction f positive telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = 1$ et $\mathrm{P}(X \in [a\ ;\ b]) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$
Fonction de répartition : $F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$	**Fonction de répartition :** $F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$
Espérance mathématique : $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$	**Espérance mathématique :** $\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\ \mathrm{d}t$
Variance : $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(\left(X - \mathrm{E}(X)\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \mathrm{E}(X)\right)^2 p_i$	**Variance :** $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(\left(X - \mathrm{E}(X)\right)^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(t - \mathrm{E}(X)\right)^2 f(t)\ \mathrm{d}t$
Ecart-type : $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$	**Ecart-type :** $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$

Propriété : si a et b sont deux réels, $\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$ et $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$

(X,Y) est un couple de variables aléatoires

Covariance : $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}\left(\left(X - \mathrm{E}(X)\right)\left(Y - \mathrm{E}(Y)\right)\right)$
Coefficient de corrélation $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)}$ Si X et Y sont **liés** par une relation **affine** $Y = aX + b$, alors $\rho = \pm 1$.
Somme et différence $\mathrm{E}(X \pm Y) = \mathrm{E}(X) \pm \mathrm{E}(Y)$ $\mathrm{V}(X \pm Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y) \pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$
Indépendance Si X et Y sont indépendantes, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ Dans ce cas, $\rho(X,Y) = 0$ et $\mathrm{V}(X \pm Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y)$


MULTIPLIONS 1986
PAR MON ÂGE
1986 x 35
DIVISONS LE RÉSULTAT OBTENU PAR LA TEMPÉRATURE AMBIANTE
AJOUTONS-Y L'HEURE EXACTE ...
ET LA RACINE CARRÉE DE MA CONSOMMATION D'EAU, DE GAZ ET D'ÉLECTRICITÉ
DIVISONS LE CHIFFRE OBTENU
PAR MA TAILLE À LA NAISSANCE
NOUS OBTENONS LE POIDS ACTUEL DE MON FRÈRE JUMEAU
À TROIS KILOS PRÈS
C'EST RENVERSANT