

Devoir à la maison

à rendre le lundi 21 février 2011

Exercice 1 (3 points).

1. En utilisant les propriétés des congruences, déterminez successivement les restes de la division euclidienne par 17 des entiers suivants : 100 ; 61 ; 161 ; 6100 ; 61^2 ; 33^{343} .
2. Calculez le PGCD de 385 et 1365.
3. Calculez l'inverse de 125 modulo 242.

Exercice 2 (3 points).

1. Montrez que pour tout entier naturel n , $12n + 1$ et $30n + 2$ sont premiers entre eux.
2. En supposant que $n \geq 1$, en est-il de même pour $4n$ et $n + 1$?
3. Donnez un couple d'entiers relatifs (x, y) solution de l'équation diophantienne

$$345x + 714y = 3$$

Exercice 3 (3 points).

1. Donnez tous les nombres inversibles dans $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$. Justifiez votre réponse.
2. Résoudre l'équation $5x \equiv 11$ dans $\mathbb{Z}/77\mathbb{Z}$.
3. Quel est le nombre de solutions dans $\mathbb{Z}/77\mathbb{Z}$ de l'équation $11x \equiv 6$? Justifiez votre réponse.

Exercice 4 (5 points). On rappelle la correspondance habituelle entre les lettres de l'alphabet $\{A, B, C, \dots, Z\}$ et les nombres $\{0, 1, 2, \dots, 25\}$.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1. On utilise la clé de chiffrement $f_1(x) \equiv 17x + 5 \pmod{26}$.
 - (a) Chiffrer le message EXAMEN.
 - (b) Vérifier que la clé de déchiffrement associée à f_1 est $g_1(x) \equiv 23x + 15 \pmod{26}$.
 - (c) Déchiffrer le message WLEHKV.
2. La fonction $f_2(x) \equiv 13x + 18 \pmod{26}$ est-elle une clé de chiffrement valide ? Pourquoi ?
3. Calculer la clé de déchiffrement g_3 associée à la clé de chiffrement $f_3(x) \equiv 15x + 11 \pmod{26}$
4. Sachant que dans un chiffrement affine inconnu, la lettre E est chiffrée par O et que la lettre H est chiffrée par J, déterminer la fonction de chiffrement f_4 correspondante.

Exercice 5 (6 points). Il s'agit dans cet exercice de déterminer un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009 \pmod{10000}$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16. En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{16}$.
2. On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $\begin{cases} u_0 = 2009^2 - 1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1 \end{cases}$. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
3. Vérifier que $u_{n+1} = u_n \times (u_n^4 + 5 \times (u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que u_0 est divisible par 5, u_1 est divisible par 25, u_2 est divisible par 125 et u_3 est divisible par 625.
5. En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{625}$
6. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.

Partie facultative : Chiffrement par substitution

- Un chiffrement par substitution simple consiste à remplacer chaque lettre par une autre, selon une méthode décidée à l'avance.
- Un chiffrement affine correspond à un cas particulier où la substitution se calcule à l'aide d'une fonction affine.

Exercice 6 (Chiffrer/Déchiffrer). Dans le cas général, il n'y a pas de fonction mathématique simple permettant de chiffrer chaque lettre, c'est pourquoi on donne la table de chiffrement en entier. On utilise la substitution suivante :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
S	C	W	U	D	X	B	F	Y	T	G	Z	I

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
H	O	J	N	K	A	M	L	P	E	Q	R	V

1. Chiffrer le message : FACILE.
2. Écrire la table de déchiffrement correspondante.
3. Déchiffrer le message DAASY.

Exercice 7 (D'où vient ce nom ?). Expliquer pourquoi les chiffrements par substitution font partie des méthodes dites à *clé secrète*.

Exercice 8 (Cette fois, ce n'est pas facile). Combien y-a-t-il de chiffrements par substitution simples différents ?

Exercice 9 (Décryptage). Le cryptogramme suivant a été obtenu à l'aide d'un chiffrement par substitution simple inconnu :

RC IZQKOGJZCKVYD DTO SUD PDT PYTIYKRYUDT PD RC IZQKO-
GRGJYD T'COOCIVCUO C KZGODJDZ PDT XDTTCJDT (CTTSZCUO
IGUBYPDUOYCRYOD, CSOVDUOYIYOD DO YUODJZYOD) DU T'-
CYPCUO TGSLDUO PD TDIZDOT GS IRDT. DRRD DTO SOYRYTDD
PDKSYT R'CUOYWSYOD, XCYT IDZOCYUDT PD TDT XDOVG-
PDT RDT KRST YXKGZOCUODT, IGXXD RC IZQKOGJZCKVYD
CTQXDOZYWSD, U'GUO WSD WSDRWSDT PYMCYUDT P'CU-
UDDT P'DHYTODUID. AYDU WS'DXYUDXXDUO TOZCODJYWSD,
RC IZQKOGJZCKVYD DTO ZDTODD KDUPCUO OZDT RGUJODXKT
SU CZO, KGSZ UD PDLDUYZ SUD TIYDUID WS'CS HHD TY-
DIRD. CLDI R'CKKCZYOYGU PD R'YUBGZXCOYWSD, TGU SOYRYT-
COYGU TD PDXGIZCOYTD PD KRST DU KRST.

1. Que deviennent les méthodes de décryptage utilisées précédemment ?
2. Décrypter le message proposé.
3. Décrire la méthode utilisée.