

Produit scalaire dans l'espace

1 Produit scalaire dans le plan (rappels)

Le plan est muni d'un repère orthonormal.

1.1 Différentes expressions du produit scalaire

\vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$
2. Si $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
3. Si \vec{u} et \vec{v} sont non nuls, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$
4. Si \vec{u} et \vec{v} sont non nuls, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB)

Remarques.

1. Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
2. Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs colinéaires et de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \cdot AC$
3. Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs colinéaires et de sens contraire, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \cdot AC$
4. Si \vec{u} et \vec{v} sont non nuls, alors $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \cos(\widehat{BAC})$
5. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$: \vec{u}^2 est le carré scalaire de \vec{u}

Propriétés.

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel k ,

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

1.2 Produit scalaire et orthogonalité

Définition. Dire que \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs *orthogonaux* signifie que :

- soit $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$
- soit $(AB) \perp (AC)$ si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont non nuls

Propriété.

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

1.3 Applications du produit scalaire

- **Théorème de la médiane.**

A et B sont deux points et I est le milieu du segment $[AB]$.
Pour tout point M , on a $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

- **Théorème d'Al Kashi.**

Dans un triangle ABC , on a $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

- **Aire d'un triangle.**

Dans un triangle ABC d'aire S , on a $S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$

- **Propriété des sinus.**

Dans un triangle ABC , on a $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$

