

T.D. : La méthode de Briggs

Présentation

Henry Briggs est un mathématicien anglais né en 1556 et mort en 1630. En 1624 (10 ans après «l'invention» des logarithmes par John Neper), il publie son ouvrage *Arithmetica logarithmica* dans lequel on trouve des tables du logarithme décimal très précises. Nous allons étudier la méthode qu'il a employée.



Un texte historique

Appliquons maintenant l'algorithme pour calculer une valeur approchée de $\log 5$. Voici la méthode expliquée par Euler dans son *Introduction à l'analyse infinitésimale* (traduction française de 1796) :

Soit la base logarithmique $a = 10$, qui est celle des tables ordinaires, & proposons-nous de trouver le **logarithme** approché de 5. Comme ce nombre est renfermé entre les limites 1 & 10, dont les logarithmes sont 0 & 1, on procédera de la manière suivante à l'extraction des racines, & on continuera les opérations jusqu'à ce qu'on soit arrivé à des limites, qui ne diffèrent plus du nombre proposé 5.

$A = 1,000000$	$lA = 0,000000$	soit
$B = 10,000000$	$lB = 1,000000$	$C = \sqrt{AB}$
$C = 3,162277$	$lC = 0,500000$	$D = \sqrt{BC}$
$D = 5,623413$	$lD = 0,750000$	$E = \sqrt{CD}$
$E = 4,216964$	$lE = 0,625000$	$F = \sqrt{DE}$
$F = 4,869674$	$lF = 0,687500$	$G = \sqrt{DF}$
$G = 5,232991$	$lG = 0,718750$	$H = \sqrt{FG}$
$H = 5,048065$	$lH = 0,703125$	$I = \sqrt{FH}$
$I = 4,958069$	$lI = 0,693125$	$K = \sqrt{HI}$
$K = 5,002865$	$lK = 0,6992187$	$L = \sqrt{IK}$
$L = 4,980416$	$lL = 0,6972656$	$M = \sqrt{KL}$
$M = 4,991627$	$lM = 0,6982421$	$N = \sqrt{KM}$

$N = 4,997242$	$lN = 0,6987304$	$O = \sqrt{KN}$
$O = 5,000052$	$lO = 0,6989745$	$P = \sqrt{NO}$
$P = 4,998647$	$lP = 0,6988525$	$Q = \sqrt{OP}$
$Q = 4,999350$	$lQ = 0,6989135$	$R = \sqrt{OQ}$
$R = 4,999701$	$lR = 0,6989440$	$S = \sqrt{OR}$
$S = 4,999876$	$lS = 0,6989592$	$T = \sqrt{OS}$
$T = 4,999963$	$lT = 0,6989668$	$V = \sqrt{OT}$
$V = 5,000008$	$lV = 0,6989707$	$W = \sqrt{TV}$
$W = 4,999984$	$lW = 0,6989687$	$X = \sqrt{WV}$
$X = 4,999997$	$lX = 0,6989697$	$Y = \sqrt{VX}$
$Y = 5,000003$	$lY = 0,6989702$	$Z = \sqrt{XY}$
$Z = 5,000000$	$lZ = 0,6989700$	

Ainsi, en prenant des moyennes proportionnelles, on est parvenu à trouver $Z = 5,000000$, à quoi répond le logarithme cherché 0,698970, en supposant la base logarithmique $\frac{69897}{100000} = 10$. Par conséquent $10^{\frac{69897}{100000}} = 5$ à-peu-près. C'est de cette manière que BRIGGS & ULACQ ont calculé la table ordinaire des logarithmes, quoiqu'on ait imaginé depuis des méthodes plus expéditives pour les trouver.

Dans la colonne de gauche, on calcule des moyennes **géométriques** : $C = \sqrt{AB}$. Dans le même temps, on calcule dans la colonne de droite des moyennes **arithmétiques** : $\log C = \frac{\log A + \log B}{2}$.

On observe dans le tableau d'Euler, que $F = \sqrt{DE}$ et $G = \sqrt{DF}$. Expliquer ce choix pour le calcul de G. Vérifier que l'on calcule bien les moyennes arithmétiques correspondantes dans la colonne de droite.

La suite formée par les moyennes géométriques successives (colonne de gauche) converge vers 5.

La suite formée par les moyennes arithmétiques (colonne de droite) converge vers $\log 5$.

Voici maintenant l'algorithme :

Méthode de Briggs : calcul de $\log x$ avec $1 < x < 10$

Entrées: x réel compris entre 1 et 10

début

On pose $A = 1$, $B = 10$, $\ell A = 0$ et $\ell B = 1$;

tant que $B - x > 10^{-5}$ **faire**

si $\sqrt{AB} \leq x$ **alors**

 A reçoit la valeur \sqrt{AB} ;

ℓA reçoit la valeur $\frac{\ell A + \ell B}{2}$

sinon

 B reçoit la valeur \sqrt{AB} ;

ℓB reçoit la valeur $\frac{\ell A + \ell B}{2}$

fin

fin

fin

Sorties: Afficher ℓB

Mise en oeuvre avec Scilab.

Ouvrir Scilab et ouvrir une fenêtre SciNotes. Recopier le programme ci-dessous en complétant lignes vides.

```

1  function y=briggs(x)
2  ... A=...
3  ... B=...
4  ... lA=...
5  ... lB=...
6  ... while B-x>10^-5
7  ...     if ... then
8  ...         ...
9  ...         ...
10 ...     else
11 ...         ...
12 ...         ...
13 ...     end
14 ... end
15 ... y=lB
16 endfunction

```

Presser la touche F5 envoyer le programme dans Scilab et cliquer dans la fenêtre Scilab pour l'activer.

Taper la commande `briggs(5)` tester l'algorithme. Vous devez obtenir une valeur semblable à celle d'Euler (qui ne possédait pas le logiciel Scilab!!).

Compléter le tableau ci-dessous en faisant tourner l'algorithme «à la main» pour le calcul de $\log(2)$. Vérifier le résultat obtenu en tapant `briggs(2)` dans Scilab (on pourra modifier le programme afin qu'il affiche toutes les valeurs intermédiaires).

1,000 000	0,000 000
10,000 000	1,000 000

Démonstration

On se propose ici de démontrer les deux conjectures émises précédemment :

La suite (A, B, \dots) formée par les nombres de la première colonne converge vers x . La suite $(\ell A, \ell B, \dots)$ formée par les nombres de la deuxième colonne converge vers $\log x$.

Pour fixer les idées, on travaillera avec $x = 2$ comme précédemment.

1. Résultat préliminaire

Montrer que pour tous réels a et b strictement positifs tels que $a < b$, on a : $a < \sqrt{ab} < b$.

2. Soit (u_n) la suite définie par les valeurs successives de la variable A dans l'algorithme et (v_n) la suite définie par les valeurs successives de la variable B. Ces deux suites vérifient les relations de récurrence suivantes :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{u_n v_n} & \text{si } \sqrt{u_n v_n} \leq 2 \\ u_n & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } v_0 = 10 \text{ et } v_{n+1} = \begin{cases} v_n & \text{si } \sqrt{u_n v_n} \leq 2 \\ \sqrt{u_n v_n} & \text{sinon} \end{cases}$$

- (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante (utiliser l'inégalité de la question 1).
- (b) Montrer que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 2 \leq v_n \leq 10$.
- (c) Dans le cas où $\sqrt{u_n v_n} \leq 2$, et donc $\sqrt{v_n} \leq \frac{2}{\sqrt{u_n}}$, montrer successivement que

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \sqrt{v_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) = \frac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}}(v_n - u_n) \leq \frac{2}{\sqrt{u_n v_n} + u_n}(v_n - u_n).$$

En déduire que $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{2}{1 + \sqrt{2}}(v_n - u_n)$ (utiliser l'inégalité de la question 2b).

- (d) Dans le cas où $\sqrt{u_n v_n} > 2$, et donc $\sqrt{v_n} > \frac{2}{\sqrt{u_n}}$, montrer successivement que

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) = \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}}(v_n - u_n) \leq \frac{u_n}{2 + u_n}(v_n - u_n).$$

En déduire que $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(v_n - u_n)$ (utiliser l'inégalité de la question 2b).

- (e) Déterminer un réel positif k tel que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - u_{n+1} \leq k(v_n - u_n)$.
- (f) En déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n - u_n \leq 9k^n$.
Que peut-on en déduire pour les suites (u_n) et (v_n) ?
- (g) En constatant que, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n - 2 \leq v_n - u_n$, déterminer la limite de la suite (v_n) , puis celle de la suite (u_n) .

3. Quelle est la limite des suites $(\log u_n)$ et $(\log v_n)$? Justifier.

Quelques références pour les curieux :

- Le cours d'Euler cité plus haut est disponible sur Google Books (voir page 75).
- Des extraits du livre de Briggs se trouvent dans cet article.
- Sur le site de référence en histoire des mathématiques (Université de St-Andrews, Écosse) : biographie de Briggs.
- Sur le même site, on trouve le texte complet du livre de Briggs : *Arithmetica logarithmica*.